PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 12. 15. Juni 1917. Redaktionsschluß für No. 13 am 22. Juni 1917. 18. Jahrgang.

INHALT:

Originalmitteilungen:
W. Hahnemann u. H. Hecht, Schallfelder und Schallantennen. II. S. 261.
A. v. Hübl, Ein Farbenmeßapparat. S. 270.
H. Haga, Ein Vorlesungs-Elektroskop. S. 275.
P. Debye, Der erste Elektronenring der Atome. S. 276.
Personalien. S. 284.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Schallfelder und Schallantennen. II.

Von W. Hahnemann und H. Hecht.

Im ersten Teil unserer Arbeit über Schallfelder und Schallantennen[1]) haben wir den Strahlungskörper nullter Ordnung, der durch eine pulsierende Kugel dargestellt wird, mathematisch behandelt und daraus einige praktische Nutzanwendungen gezogen. Von den Strahlungskörpern höherer Ordnung interessiert am meisten derjenige erster Ordnung. Wir wollen daher im folgenden zunächst die Ableitung der Formeln des Strahlungskörpers erster Ordnung auf Grund der Rayleighschen Berechnungen geben. Hinsichtlich der Strahler von höherer als der ersten Ordnung begnügen wir uns für die Praxis mit dem Hinweis, daß es wohl stets gelingen wird, falls Körper zweiter oder noch höherer Ordnung vorliegen, diese durch einfache Übertragungen auf Körper erster Ordnung zurückzuführen.

Im zweiten Kapitel der vorliegenden Arbeit wollen wir die Resultate, die wir früher für den Nullstrahler gewonnen haben, dazu benutzen, um an einem Beispiel zu zeigen, wie man Strahlergebilde, die sich mathematisch exakt nicht mehr behandeln lassen, praktisch mit genügender Genauigkeit berechnen kann.

Im dritten Kapitel sollen experimentelle Bestimmungen der berechneten Größen folgen, die eine Kontrolle und Bestätigung der theoretischen Ergebnisse gestatten.

I. Die Theorie des Strahlers erster Ordnung.

Um die Strahler der verschiedenen Ordnungen mathematisch behandeln zu können, wählt Rayleigh die Kugelform und stellt das Geschwindigkeitspotential als Kugelfunktion dar. Der Strahler nullter Ordnung ist dargestellt als eine Kugel, deren Oberfläche in allen ihren Teilen konphase Bewegungen gleicher Amplitude ausführt. Eine solche Kugel nennen wir eine pulsierende oder atmende Kugel. Der Strahler erster Ordnung ist dargestellt durch eine um eine Gleichgewichtslage hin und her schwingende Kugel. Während also beim Strahler nullter Ordnung nur eine radiale Bewegung des Mediums möglich ist, tritt jetzt gleichzeitig eine tangentiale Bewegung des Mediums ein, die zur Strahlung keinen Anteil liefert. Diese tangentiale Bewegung wollen wir Schlüpfung des Mediums nennen. Die Schlüpfungsbewegung bedeutet nur ein Hin- und Herschieben von Massen, ohne daß diese auf Druck kommen und akustisch wirksam werden, während die radiale Bewegung die eigentliche Druck- oder Strahlungsbewegung ist. Wieviel von der gesamten Mediumsbewegung Schlüpfungsbewegung und wieviel Strahlungsbewegung ist, hängt von dem Verhältnis der Größe des Strahlers erster Ordnung zur Wellenlänge ab.

Man sieht schon ohne jede Rechnung, daß immer mehr Schlüpfung auftreten muß, je kleiner der Strahler wird. Auch beim Strahler nullter Ordnung tritt eine gewisse Schlüpfung auf, nur ist diese im Medium anders verteilt und wird groß, wenn der Strahler so klein ist, daß die Divergenz, d. h. die Vergrößerung der Querschnitte, durch die gleichen Energiequanten treten, im Abstande einer Wellenlänge

---

1) Diese Zeitschr. **17**, 601 ff., 1916. Wir benutzen die Gelegenheit, einen Fehler zu berichtigen. Es muß Seite 603, Spalte 2, Zeile 21 heißen: „worin das Rayleighsche A durch Q ersetzt ist und den Maximalwert des durch die schwingende Kugel erzeugten Mediumstromes bedeutet, ... " Zwischen Volumenänderung der Kugel Δv und Mediumstrom Q besteht bei sinusförmiger Schwingung die Beziehung $\pi n \Delta v = Q$. Die in einer halben Periode transportierte Mediummasse ist nämlich ausgedrückt durch den Maximalwert des Mediumstromes

$$\int_{t=0}^{t=1/2n} Q \sin 2\pi n t \, dt = \frac{Q}{\pi \cdot n}$$

und diese Mediummenge ist gleich dem Deformationsvolumen Δv der Kugel.

in Richtung des fortschreitenden Schallstrahles groß ist.

Im folgenden wollen wir die von Rayleigh[1]) abgeleitete Kraftgleichung des Strahlers erster Ordnung in anderer Form aufstellen.

Während wir beim Strahler nullter Ordnung, bei dem der Druck auf der ganzen Oberfläche konstant ist, aus diesem Grunde die Druckgleichung aufstellten, hat es physikalisch kaum einen Sinn mehr, dasselbe beim Strahler erster Ordnung zu tun, bei dem der Druck von den Polen zum Äquator hin vom Maximalwerte bis Null zu abnimmt, wenn die Schwingung in Richtung der Polachse erfolgt. Wir summieren daher gleich über die ganze Oberfläche und stellen die Kraftgleichung auf.

Wir führen dieselben Bezeichnungen wie im Teil I unserer Arbeit ein und ersetzen insbesondere wieder das Rayleighsche $\varkappa = \frac{n}{a}$ durch $\frac{2\pi n}{a}$, c durch R, Ξ durch k und die Konstanten p und q durch α und β. Dann nimmt die Kraftgleichung die Form an:

$$k = \frac{4\pi}{3} R^3 \varrho c \frac{\partial i}{\partial t} + \frac{8\pi^2}{3} R^3 \varrho n \beta i.$$

Hierin haben die Konstanten α und β die Bedeutung

$$\alpha = \frac{2 + \left(\frac{2\pi R}{\lambda}\right)^2}{4 + \left(\frac{2\pi R}{\lambda}\right)^4}$$

und

$$\beta = \frac{\left(\frac{2\pi R}{\lambda}\right)^3}{4 + \left(\frac{2\pi R}{\lambda}\right)^4}.$$

Aus der Kraftgleichung finden wir ebenso wie früher aus der Druckgleichung den Dämpfungsfaktor zu

$$\delta = \frac{\frac{8\pi^2}{3} R^3 \varrho n \beta}{2 \cdot \frac{4\pi}{3} R^3 \varrho \alpha} = \pi n \frac{\beta}{\alpha}$$

und die Dämpfung zu

$$\mathfrak{d} = \pi \frac{\beta}{\alpha} = \pi \frac{\left(\frac{2\pi R}{\lambda}\right)^3}{2 + \left(\frac{2\pi R}{\lambda}\right)^2}.$$

Dieser Ausdruck für die Dämpfung nimmt einfache Werte an, wenn $\left(\frac{2\pi R}{\lambda}\right)^2$ klein oder groß gegen 2 ist. In den beiden Grenzfällen wird:

$$\mathfrak{d}_{R << \lambda} = 4\pi^4 \left(\frac{R}{\lambda}\right)^3$$

$$\mathfrak{d}_{R >> \lambda} = 2\pi^2 \left(\frac{R}{\lambda}\right).$$

Während die Formel für den zur Wellenlänge kleinen Strahler zeigt, daß die Dämpfung der dritten Potenz der Wellenlänge umgekehrt proportional ist und damit ein bemerkenswertes Analogon zu den Antennen der elektromagnetischen Schwingungen liefert, die wir in unserer Terminologie auch Strahler erster Ordnung nennen müssen, erkennen wir in dem Ausdrucke für den zur Wellenlänge großen Strahler die Dämpfungsformel für den Nullstrahler wieder. Auch dies ist physikalisch leicht verständlich, da bei Körpern erster Ordnung, die bereits eine halbe Wellenlänge groß geworden sind, eine nennenswerte Schlüpfungsbewegung kaum mehr eintreten kann, durch deren Fehlen aber gerade der Strahler nullter Ordnung charakterisiert war. Die Schallfelder des Nullstrahlers und des zur Wellenlänge großen Strahlers erster Ordnung sind allerdings wesentlich verschieden: Das erstere ist unpolarisiert, das zweite polarisiert in Richtung der Schwingungsachse.

Wie weit die vereinfachten Dämpfungsformeln für den Strahler erster Ordnung Gültigkeit haben, geht aus Tabelle I hervor, in der in der ersten Kolumne die Größe des Strahlers im Verhältnis zur Wellenlänge, in der zweiten, dritten und vierten, die Dämpfung, berechnet nach der Formel für Körper beliebiger Größe, klein und groß zur Wellenlänge, steht.

Tabelle I.

$\frac{R}{\lambda}$	$\frac{\pi\left(\frac{2\pi R}{\lambda}\right)^3}{2+\left(\frac{2\pi R}{\lambda}\right)^2}$	$4\pi^4\left(\frac{R}{\lambda}\right)^3$	$2\pi^2\frac{R}{\lambda}$
1	19	390	20
$^1/_2$	8	49	10
$^1/_3$	1,7	3,1	4
$^1/_{10}$	0,32	0,39	2
$^1/_{20}$	0,048	0,049	1
$^1/_{50}$	0,0031	0,0031	0,4
$^1/_{100}$	0,00039	0,00039	0,2

Diese Tabelle zeigt, daß man Strahler erster Ordnung von der Größe $^1/_{10}$ Wellenlänge ab als klein und über $^1/_2$ Wellenlänge als groß zur Wellenlänge betrachten darf. Dazwischen liegt ein Übergangsgebiet, in dem man die exakte Formel benutzen muß.

1) Rayleigh, Theorie des Schalles. Deutsche Ausgabe von Neesen II, S. 281.

Durch Vergleich der Strahlungsdämpfung in der zweiten Kolumne mit den Werten der letzten Kolumne, die gleichzeitig die Strahlungsdämpfung einer gleich großen, aber in allen Teilen gleichphasig schwingenden Kugel angibt, finden wir, daß die Strahlungsdämpfung eines Körpers erster Ordnung von der Größe $^1/_{50}$ Wellenlänge nur noch 1 Proz. von derjenigen eines gleich großen Körpers nullter Ordnung ist.

Die mitschwingende Mediummasse finden wir aus der Kraftgleichung ohne weiteres zu

$$M = \frac{4\pi R^3 \varrho}{3} \cdot \frac{2 + \left(\frac{2\pi R}{\lambda}\right)^2}{4 + \left(\frac{2\pi R}{\lambda}\right)^4}.$$

Betrachten wir wieder die beiden extremen Fälle, wenn der Strahler klein oder groß zur Wellenlänge ist, so wird

$$M_{R<<\lambda} = \frac{2\pi}{3} R^3 \varrho$$

und

$$M_{R>>\lambda} = \frac{R \lambda^2 \varrho}{3\pi}.$$

Für die praktische Anwendbarkeit dieser beiden Formeln gelten dieselben Grenzen, wie für die entsprechenden der Dämpfung.

II. Die Theorie der Membran als Strahler nullter Ordnung.

Rayleigh hat den Fall einer starren kreisförmigen Platte behandelt, die in einer gleich großen kreisförmigen aus einer unendlich großen starren ebenen Platte ausgeschnittenen Öffnung schwingt[1]).

Die mathematischen Ableitungen und Resultate sind schwierig und unübersichtlich und geben einfache Resultate nur, wenn die schwingende Platte klein zur Wellenlänge ist. Wir beschränken uns im folgenden auf diesen für die Praxis meist genügenden Fall. Dann sind Druck und Bewegung des Mediums an der Membranoberfläche quasi-stationär und die Druckgleichung der Kolbenmembran, wie wir die Rayleighsche Platte nennen wollen, nimmt die Form an

$$p = \frac{8}{3\pi} R \varrho \frac{\partial i}{\partial t} + \frac{a \varrho}{2} \left(\frac{2\pi R}{\lambda}\right)^2 i.$$

Hierbei haben wir dieselben Bezeichnungen wie in unserer ersten Abhandlung gewählt und insbesondere das Rayleighsche $\varkappa = \frac{n}{a}$ durch $\frac{2\pi n}{a}$ ersetzt, während die Dichte mit ϱ statt mit σ und die Geschwindigkeit mit i statt mit ξ bezeichnet wird.

Führen wir in diese Druckgleichung statt des Radius R die Größe F der strahlenden Fläche ein, so wird

$$p = \frac{8}{3\pi\sqrt{\pi}} \sqrt{F} \varrho \frac{\partial i}{\partial t} + 2\pi a \varrho \frac{F}{\lambda^2} i.$$

Strahlt nun die Platte nicht, wie bisher angenommen, in einen von einer starren Ebene begrenzten Halbraum, sondern in das nach allen Richtungen hin unendlich ausgedehnte Medium, jedoch so, daß nach wie vor nur eine Seite der Platte an das Medium stößt, während die andere Seite durch einen schließenden Zylinder überdeckt ist, der selbst klein zur Wellenlänge ist, so kann man durch folgende Überlegungen diesen Fall auf den vorigen zurückführen.

Das Schallfeld, das ein in einer starren Wand befindlicher Strahler nullter Ordnung in dem Halbraum erzeugt, ist gleich dem Schallfelde, das zwei konphase Strahler nullter Ordnung der gleichen Größe c. p. in dem ganzen Raume erzeugen, vorausgesetzt, daß ihr Abstand klein zur Wellenlänge ist. Mithin stellt unsere obige Druckgleichung auch den Fall von zwei Strahlern der Größe F oder eines Strahlers der Größe $2F$ im freien Medium dar, da die Voraussetzung ihrer Kleinheit im Verhältnis zur Wellenlänge uns diese einfache Addition gestattet.

Mithin ist die Druckgleichung einer Kolbenmembran der Größe F im freien Medium

$$p = \frac{8}{3\sqrt{2\pi}\sqrt{\pi}} \sqrt{F} \varrho \frac{\partial i}{\partial t} + \pi a \varrho \frac{F}{\lambda^2} i.$$

Wir wollen hiermit die Druckgleichung eines kugelförmigen Nullstrahlers, der ebenso wie die Kolbenmembran als klein zur Wellenlänge angenommen werde, vergleichen. Aus Teil I unserer Arbeit finden wir für diesen Spezialfall

$$p = R \varrho \frac{\partial i}{\partial t} + a \varrho \left(\frac{2\pi R}{\lambda}\right)^2 i.$$

Führen wir auch hier durch die Beziehung

$$F = 4\pi R^2$$

die Größe der strahlenden Fläche ein, so wird die Druckgleichung des Kugelstrahlers

$$p = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{F} \varrho \frac{\partial i}{\partial t} + \pi a \varrho \frac{F}{\lambda^2} i.$$

Die beiden Druckgleichungen für Membran und Kugel lauten demnach

$$p_{\text{Membran}} = 0{,}34 \varrho \sqrt{F} \frac{\partial i}{\partial t} + \pi a \varrho \frac{F}{\lambda^2} i$$

$$p_{\text{Kugel}} = 0{,}28 \varrho \sqrt{F} \frac{\partial i}{\partial t} + \pi a \varrho \frac{F}{\lambda^2} i.$$

1) Rayleigh, l. c. II, S. 193—204.

Tabelle II.

	Gleichung der Kurve	Deformationsvolumen $= 2\pi \int y\, x\, dx$	Formfaktor	Schwingungsmasse $2\pi d\varrho' \int \left(\frac{y}{h}\right)^2 x\, dx$	Massenfaktor
Kegel	$y = h\left(1 - \frac{x}{R}\right)$	$\frac{1}{3} h\pi R^2$	$\sqrt{\frac{1}{3}} = 0{,}58$	$\frac{1}{6}\varrho' d\pi R^2$	$\sqrt{\frac{1}{6}} = 0{,}41$
Elastische Linie des an beiden Enden eingespannten Trägers. Kraft greift im Mittelpunkt an.	$y = h\left(1 - 3\left(\frac{x}{R}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{R}\right)^3\right)$	$0{,}3\, h\pi R^2$	$\sqrt{0{,}3} = 0{,}55$	$\frac{6}{35}\varrho' d\pi R^2$	$\sqrt{\frac{6}{35}} = 0{,}41$
Elastische Linie des an beiden Enden eingespannten, gleichmäßig belasteten Trägers.	$y = h\left(1 - 2\left(\frac{x}{R}\right)^2 + \left(\frac{x}{R}\right)^4\right)$	$\frac{1}{3} h\pi R^2$	$\sqrt{\frac{1}{3}} = 0{,}58$	$\frac{1}{5}\varrho' d\pi R^2$	$\sqrt{\frac{1}{5}} = 0{,}45$
Sinuslinie.	$y = h \cos \frac{\pi x}{2R}$	$\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\frac{8}{\pi^2} h\pi R^2 = 0{,}46\, h\pi R^2$	$\sqrt{0{,}46} = 0{,}68$	$\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2}\right)\varrho' d\pi R^2 = 0{,}30\, \varrho' d\pi R^2$	$\sqrt{0{,}30} = 0{,}55$

Wir finden also für die so verschieden gestalteten Flächen einer ebenen Kolbenmembran und einer Kugel eine sehr nahe Übereinstimmung, vorausgesetzt, daß die Dimension des Strahlers klein zur Wellenlänge ist. Die eigentlichen Strahlungsglieder der beiden Druckgleichungen sind vollständig identisch, und die die mitschwingende Mediummasse liefernden Glieder unterscheiden sich voneinander nur um 20 Proz. Man wird daher viele Probleme der praktischen Akustik, für die sich das Geschwindigkeitspotential nicht mehr aufstellen läßt und die der strengen mathematischen Behandlung große Schwierigkeiten bereiten, näherungsweise durch Einreihung und Anlehnung an diese beiden Fälle lösen können.

Als Beispiel wählen wir die am Rande fest eingespannte, kreisförmige Membran, die uns gestattet, die erhaltenen theoretischen Resultate sowohl mit den Ergebnissen streng mathematischer Ableitungen zu vergleichen, wie auch experimentell leicht nachzuprüfen.

Wegen der Ähnlichkeit der strahlenden Fläche nach Krümmung und Begrenzung wählen wir den Zahlenfaktor der Druckgleichung der Kolbenmembran.

Aus der Druckgleichung der Kolbenmembran finden wir ihre Kraftgleichung, indem wir über die ganze Fläche summieren zu

$$k = \frac{8}{3\sqrt{2\pi}\sqrt{\pi}} F \sqrt{F}\, \varrho \frac{\partial i}{\partial t} + \pi a \varrho \left(\frac{F}{\lambda}\right)^2 i,$$

wenn k die durch die Mediumbewegung hervorgerufene und auf die ganze Kolbenfläche wirkende Gesamtkraft darstellt. Führen wir statt der Flächengröße wieder den Radius ein, so wird

$$k = \frac{8}{3\sqrt{2}} R^3 \varrho \frac{\partial i}{\partial t} + \pi^3 a \varrho R^2 \left(\frac{R}{\lambda}\right)^2 i.$$

Die betrachtete Kolbenmembran denken wir uns nun ersetzt durch eine am Rande fest eingespannte kreisförmige Membran. Diese Membran wird einer Kolbenmembran entsprechen, wenn beide das gleiche Verschiebungsvolumen haben. Um das Verschiebungs- oder Deformationsvolumen, das bei der Kolbenmembran $\pi R^2 h$ ist, für die am Rande eingespannte Membran zu finden, müßten wir die Kurvenform für die deformierte Membran kennen. Diese Kurvenform hängt von der Einspannung, der Angriffsart der die Deformation hervorrufenden Kraft usw. ab. Wir wollen einige wahrscheinliche Kurvenformen annehmen, für sie das Deformationsvolumen berechnen und uns dann für einen mittleren Formfaktor entscheiden und mit diesem die weitere Rechnung beispielsweise durchführen. Wir wählen hierzu vier Kurvenformen, und zwar, den einfachen Konus, die elastische Linie des an beiden Enden eingespannten und in der Mitte belasteten Trägers[1]), die elastische Linie des an beiden Enden eingespannten, gleichmäßig belasteten Trägers[1]) und die Sinuslinie.

In der Tabelle II befindet sich für diese vier Kurvenformen in der zweiten Kolumne die Gleichung der Kurven, in der dritten das Deformationsvolumen, in der vierten der Formfaktor, mit dessen Quadrat die Grundfläche zu multiplizieren ist, um das einer Kolbenmembran gleicher Amplitude entsprechende Deformationsvolumen zu finden, in der fünften Kolumne die

1) Hütte I, 566 und 568, 1911.

im Membranmittelpunkt konzentriert anzunehmende Schwingungsmasse der Membran und in der sechsten der Massenfaktor, mit dessen Quadrat die Gesamtmasse der Membran zu multiplizieren ist, um die im Mittelpunkt angreifend gedachte Schwingungsmasse zu finden. Diesen Massenfaktor werden wir später bei Ableitung der Schwingungszahl der Membran gebrauchen, haben aber jetzt schon die Gelegenheit benutzt, um ihn für diese vier Kurvenformen auszurechnen.

Wie man erkennt, unterscheiden sich alle vier Kurvenformen nicht wesentlich voneinander. Als Formfaktor wählen wir 0,6, weil dieser Wert ein guter Mittelwert für die vier Kurvenformen ist und am besten der wahrscheinlichsten Kurve, nämlich derjenigen des an beiden Enden eingespannten, gleichmäßig belasteten Trägers entspricht. Wir werden später sehen, daß das Experiment diese Wahl bestätigt.

Wir erhalten aus der Kraftgleichung der Kolbenmembran diejenige der eingespannten Membran, indem wir R durch $0{,}6\ R$ ersetzen, zu

$$k = \frac{8 \cdot 0{,}6^3}{3\sqrt{2}} R^3 \varrho \frac{\partial i}{\partial t} + \pi^3 \cdot 0{,}6^4 a \varrho R^2 \left(\frac{R}{\lambda}\right)^2 i$$

oder

$$k = 0{,}4\ R^3 \varrho \frac{\partial i}{\partial t} + 4 a \varrho R^2 \left(\frac{R}{\lambda}\right)^2 i.$$

Dieser Ausdruck für k stellt die von der Mediumbewegung herrührenden Kräfte dar, wenn i die Geschwindigkeit des Membranzentrums ist, und zwar der erste Term eine wattlose Kraft, der zweite eine Wattkraft. Die Größe $0{,}4\ R^3 \varrho$ liefert mit $\frac{J^2}{2}$ multipliziert die leerschwingende Energie des Systems, wenn J den Maximalwert von i darstellt; wir nennen deshalb $0{,}4\ R^3 \varrho$ die mitschwingende Mediummasse. Die Größe $4 a \varrho R^2 \left(\frac{R}{\lambda}\right)^2$ liefert mit $\left(\frac{J}{\sqrt{2}}\right)^2 = J_{\text{eff.}}^2$ multipliziert die vom System in Form von akustisch-mechanischer Arbeit abgegebene Energie; wir nennen deshalb $4 a \varrho R^2 \left(\frac{R}{\lambda}\right)^2$ den akustischen Strahlungswiderstand.

Um die vollständige Schwingungsgleichung der Membran zu finden, haben wir noch die von der Membran selbst herrührenden Kräfte hinzuzufügen. Diese sind teils elastischer Natur, teils Massen- oder Trägheitskräfte, herrührend von der Schwingungsmasse der Membran selbst.

Die Elastizität C einer am Rande fest eingespannten Membran ist nicht nur von den Dimensionen und Material der Membran, sondern auch von Spannungen, geringen Deformationen usw. in hohem Maße abhängig. Einen genauen, zahlenmäßigen Wert anzugeben, ist kaum angängig; wir wählen beispielsweise denjenigen aus der Hütte[1]), der für den Fall der spannungsfreien, ebenen Membran lautet

$$C = \frac{0{,}22\ R^2}{d^3 E}$$

wenn E der Elastizitätsmodul und d die Dicke der Membran ist.

Um die Schwingungsmasse der Membran, d. h. den im Mittelpunkt schwingend anzunehmenden Teil der gesamten Membranmasse zu berechnen, ist das Integral über die Massenelemente, multipliziert mit dem Quadrat des Amplitudenverhältnisses zu bilden. Diese Rechnung ist bereits in Tabelle II für vier verschiedene Kurvenformen ausgeführt. Wie bei der Aufstellung der Kraftgleichung entscheiden wir uns wieder für die Kurvenform des an beiden Enden eingespannten, gleichmäßig belasteten Trägers und wählen als Massenfaktor 0,45. Auch für die Wahl dieses Faktors wird das Experiment später den Beweis der Richtigkeit erbringen. Wir nehmen also zunächst die Schwingungsmasse m der Membran zu

$$m = (0{,}45\ R)^2 \pi d \varrho'$$

an, wenn ϱ' die Materialdichte ist.

Wir erhalten nunmehr, wenn e die aufgedrückte, die Schwingungen der Membran erhaltende Kraft ist, die vollständige Kraftgleichung

$$e = (0{,}4\ R^3 \varrho + 0{,}2\ \pi R^2 d \varrho') \frac{\partial i}{\partial t} + 4 a \varrho R^2 \left(\frac{R}{\lambda}\right)^2 \cdot i + \frac{d^3 E}{0{,}22\ R^2} \int i\, dt.$$

Aus dieser Gleichung finden wir ohne weiteres die uns interessierenden Größen, wie mitschwingende Mediummasse, Schwingungszahl und Dämpfung. Die mitschwingende Mediummasse ist

$$M = 0.4\ R^3 \varrho,$$

die Schwingungszahl unter Vernachlässigung des Einflusses der Dämpfung

$$n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{d^3 E}{0{,}22\ R^2 (0{,}4\ R^3 \varrho + 0{,}2\ \pi R^2 d \varrho')}}$$

und die Dämpfung

$$\mathfrak{d} = \frac{\delta}{n} = \frac{4 a \varrho R^2 \left(\frac{R}{\lambda}\right)^2}{2 \cdot n \cdot 0{,}4\ R^3 \varrho} \cdot \frac{M}{M + m}$$

$$\mathfrak{d} = 5 \frac{R}{\lambda} \frac{M}{M + m}.$$

1) Hütte I, 621, 1911.

Die Schwingungszahl wird, wenn man die Mediummasse gegen die Membranmasse vernachlässigen kann, wie dies bei Metallmembranen in Luft wohl immer der Fall sein wird[1]),

$$n_i = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{d^3 E}{0{,}22\, R^2\, 0.2\pi R^2 d\varrho'}}$$

$$n_i = 0{,}43\,\frac{d}{R^2}\sqrt{\frac{E}{\varrho'}}.$$

Diese Formel zur Berechnung der Schwingungszahl von Membranen in Luft ist, wie wir schon oben erwähnten, infolge des angenommenen, unsicheren Wertes der Elastizität ungenau und wenig zuverlässig. Man wird in der Praxis umgekehrt diese Schwingungszahl immer experimentell zu bestimmen suchen, um aus ihr und der einwandfreier zu berechnenden Schwingungsmasse die Elastizität zu finden.

Der Ausdruck für die Dämpfung

$$\mathfrak{d} = 5\,\frac{R}{\lambda}\,\frac{M}{M+m}$$

stellt nur den Wert für die Strahlungsdämpfung dar. Innere, schädliche und durch besondere Einrichtungen (Mikrophon, Telephon) abgebremste Nutzdämpfungen sind nicht berücksichtigt; sie würden für die Schwingungsgleichung noch ein Glied von der Form $w \cdot i$ liefern, wobei man w den akustischen Bremswiderstand nennen kann.

Betrachten wir wieder den Fall einer Metallmembran in Luft, so nimmt die Strahlungsdämpfung den Wert an

$$\mathfrak{d} = 5\,\frac{R}{\lambda}\,\frac{M}{m}$$

oder nach Einsetzung der Werte für M und m

$$\mathfrak{d} = 5\,\frac{R}{\lambda}\,\frac{0{,}4\, R^3 \varrho}{0{,}2\pi R^2 d\varrho'}$$

$$\mathfrak{d} = 3{,}2\,\frac{R^2}{d}\cdot\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\varrho}{\varrho'}.$$

Da für diesen Fall die Schwingungszahl gegeben ist zu

$$n = 0{,}43\,\frac{d}{R^2}\sqrt{\frac{E}{\varrho'}},$$

so wird die Dämpfung nach Einsetzung dieses Wertes

$$\mathfrak{d} = 3{,}2\,\frac{0{,}43\sqrt{\frac{E}{\varrho'}}}{n}\,\frac{1}{\lambda}\,\frac{\varrho}{\varrho'}$$

$$\mathfrak{d} = 1{,}4\,\frac{\varrho}{a}\sqrt{\frac{E}{\varrho'^3}}$$

wenn a die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in Luft ist. Wir erhalten also das sehr interessante Resultat, daß die Strahlungsdämpfung von Membranen — die Eigenmasse als groß gegen die mitschwingende Luftmasse vorausgesetzt — unabhängig von ihrer Größe und Abstimmung und nur noch abhängig vom Material ist. Die Dämpfung steigt mit dem Verhältnis Elastizitätsmodul zu Dichte. Um große Dämpfungen zu erzielen, muß man also das Material von diesem Gesichtspunkte aus wählen.

Nach Einsetzung der Werte für Luft

$$a = 33\,300 \text{ cm/sec}$$
$$\varrho = 0{,}0012$$

wird die Dämpfung

$$\mathfrak{d} = 5 \cdot 10^{-8}\sqrt{\frac{E}{\varrho'^3}}.$$

Für Bronzemembranen mit

$$E = 10^{12} \text{ Dyn/cm}^2$$
$$\varrho' = 8{,}5$$

wird also

$$\mathfrak{d} = 0{,}002.$$

Die Dämpfung von Membranen in Luft ist demnach in allen Fällen sehr gering. Da die schädliche Dämpfung durch innere Reibung von denselben oder gar größeren Beträgen ist, so wäre eine Bestimmung der Dämpfung in Luft zur Kontrolle unserer Dämpfungsformel nicht geeignet gewesen[1]). Wir wählten daher Wasser als Medium, in dem, wie wir gleich sehen werden, wesentlich größere Dämpfungen zu erwarten sind.

Um die Abhängigkeit der Dämpfung einer Membran in Wasser von ihrer Größe zu untersuchen, ist in der folgenden Tabelle III für eine Bronzemembran in der zweiten Kolumne bei angenommener Elastizität und konstanter Schwin-

Tabelle III.

R	d	Schwingungsmasse der Membran	Mitschwingende Wassermasse	Membranmasse / Wassermasse	$\mathfrak{d}$
1	0,0161	0,086	0,40	0,21	0,029
2	0,053	1,13	3,2	0,35	0,052
3	0,108	5,2	10,8	0,48	0,071
4	0,178	15,2	25,6	0,59	0,088
6	0,36	70	86	0,81	0,116
8	0,61	208	204	1,02	0,138
10	0,92	490	400	1,23	0,157
15	1,93	2320	1350	1,72	0,193
20	3,1	6650	3200	2,1	0,220

1) Genau gilt es natürlich nur für das Vakuum.

1) Dies ist auch der Grund dafür, daß sich Membransender für Luft nur mit sehr geringem Wirkungsgrade bauen lassen. Schallsender großer Intensität liefern Sirenen, deren Strahlungsleistung man aus den Formeln für den Nullstrahler nach geringer Umformung berechnen kann.

gungszahl von 1000 Perioden/Sekunde die Dicke berechnet, während in der dritten Kolumne die Schwingungsmasse der Membran, in der vierten die mitschwingende Mediummasse, in der fünften das Verhältnis von Membranmasse zur Mediummasse und in der sechsten die Dämpfung steht. Aus dieser Tabelle geht hervor, daß sich die Dämpfung einem Grenzwerte zu nähern scheint. Dies rührt daher, daß mit zunehmendem Radius allmählich die Membranmasse groß gegen die Mediummasse wird, und somit dieselben Verhältnisse eintreten, die in Luft von vornherein bestehen; insbesondere ist dann die Dämpfung nur noch vom Material der Platte abhängig. Auf jeden Fall sieht man, daß die Dämpfungen wesentlich größere als in Luft sind. Aus diesem Grunde geschah auch, wie wir schon erwähnten, die experimentelle Bestimmung und Prüfung der Dämpfungsformel in Wasser als Medium.

Die für die Berechnung der Strahlungsdämpfung in Wasser gültige Formel lautet, wie wir oben sahen,

$$\mathfrak{d} = 5\,\frac{R}{\lambda}\,\frac{M}{M+m}.$$

Um die Unsicherheit, die immerhin noch in der Berechnung der Massen M und m steckt, welch letztere häufig noch durch die Vorrichtung zur Messung der Amplitude (Telephonanker od. dgl.) vermehrt wird, zu vermeiden, kann man das Massenverhältnis durch das Verhältnis der entsprechenden Schwingungszahlen ersetzen. Stellen n_l und n_w die Schwingungszahlen in Luft und Wasser dar, so ist

$$\frac{m}{M+m} = \left(\frac{n_w}{n_l}\right)^2,$$

oder die Dämpfung

$$\mathfrak{d} = 5\,\frac{R}{\lambda}\left(1 - \left(\frac{n_w}{n_l}\right)^2\right).$$

In dieser Form stellt sich die Dämpfung zur Kontrolle durch die Beobachtungen am geeignetsten dar.

Bevor wir jedoch daran gehen, unsere theoretisch abgeleiteten Größen durch das Experiment nachzuprüfen, wollen wir den Wert für die Strahlungsleistung einer Membran, wie er sich aus Kraftgleichung und Formfaktor ergibt, mit dem auf anderem, direkten Wege von M. Wien[1]) erhaltenen vergleichen.

Wien berechnet in der unten zitierten Arbeit die Energie, die eine in einer starren Wand befestigte, im Mittelpunkt erregte Membran in gegebener Entfernung in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit sendet, und findet dafür den Wert

$$A = \frac{0{,}147^2\, p_0 k (2\pi n)^4 a_0^2 R^4}{2 a^3 r^2}.$$

Um eine Übereinstimmung mit unseren bisher angewandten Bezeichnungen zu erhalten, sind folgende Änderungen eingeführt: Die Schallgeschwindigkeit c ist mit a, die Entfernung ϱ von der Schallplatte mit r und die Frequenz N mit n bezeichnet. p_0 und k stellen Luftdruck und Verhältnis der spezifischen Wärmen dar, während a_0 die Amplitude des Mittelpunktes der Membran ist. Das durch einen Druckfehler ausgelassene R^4 ist in die Formel eingefügt.

Unter Benutzung der Beziehungen

$$a = \sqrt{\frac{p_0}{\varrho} k}$$

und

$$2\pi n a_0 = J$$

wird

$$A = \frac{0{,}147^2\, \varrho (2\pi n)^2 R^4 J^2}{2 a r^2}.$$

Die gesamte von der Schallplatte in den Halbraum gestrahlte Leistung finden wir durch Multiplikation mit der Fläche $2\pi r^2$ zu

$$L = 4\pi^3\, 0{,}147^2 \frac{\varrho}{a} n^2 R^4 J^2$$

oder

$$L = 2{,}7\, a \varrho R^2 \left(\frac{R}{\lambda}\right)^2 J^2.$$

Die Kraftgleichung der der Wienschen Rechnung zugrunde liegenden Membran finden wir aus der Gleichung der Kolbenmembran durch Einführung des Formfaktors 0,55, den wir aus Tabelle II für eine im Mittelpunkt angreifende Kraft entnehmen, zu

$$k = \frac{8}{3}\, 0{,}55^3 R^3 \varrho \frac{\partial i}{\partial t} + 2\pi^3\, 0{,}55^4 a \varrho R^2 \left(\frac{R}{\lambda}\right)^2 i$$

oder

$$k = 0{,}44\, R^3 \varrho \frac{\partial i}{\partial t} + 5{,}6\, a \varrho R^2 \left(\frac{R}{\lambda}\right)^2 i$$

und die Strahlungsleistung durch Multiplikation des Strahlungswiderstandes mit $\left(\frac{J}{\sqrt{2}}\right)^2$ zu

$$L = 2{,}8\, a \varrho R^2 \left(\frac{R}{\lambda}\right)^2 J^2$$

in sehr guter Übereinstimmung mit dem obigen Wienschen Werte.

III. Experimentelle Messungen an Membranen.

1. Mitschwingende Mediummasse.

Da die mitschwingende Mediummasse in Luft gegen die Membranmasse klein ist, so

[1]) M. Wien, Pflügers Archiv für die ges. Physiologie 97, 1, 1903.

wählten wir zur experimentellen Bestätigung unserer theoretisch abgeleiteten Formel als Medium Wasser.

Es wurden an mehreren Membranen verschiedener Radien und Dicken bei gleichzeitig verschiedenen Frequenzen experimentell die im Wasser mitschwingende Mediummasse bestimmt, indem im Mittelpunkt der Membran in Luft so viel Masse befestigt wurde, bis wieder derselbe Ton wie im Wasser eintrat.

In Tabelle IV sind die erhaltenen Resultate und Berechnungen zusammengestellt und zwar in der ersten Kolumne der Radius R, in der zweiten und dritten die Tonhöhen n_w und n_l der unbelasteten Membran in Wasser und Luft und in der vierten die Masse M, die in der Luft dieselbe Abstimmung hervorruft, wie sie der unbelasteten Membran im Wasser entspricht.

Tabelle IV.

R	n_w	n_l	$M_{beob.}$	$M_{ber.}$	$\frac{M_{ber.} - M_{beob.}}{M_{ber.}}$
2,1	2140	3120	4,5	3,9	— 0,15
2,1	1495	2240	3,8	3,9	+ 0,03
2,1	1160	1820	5,0	3,9	— 0,28
2,1	940	1410	3,2	3,9	+ 0,18
2,5	490	670	5,5	6,3	+ 0,13
4,0	1240	1880	23	22	— 0,05
5,6	1200	1800	60	56	— 0,07

Unter der Annahme, daß die mitschwingende Mediummasse einer Potenz des Membranradius proportional ist, d. h. der Gleichung gehorcht

$$M = x R^y,$$

sind die Beobachtungen zur Bestimmung der Konstanten x und y ausgewertet worden. Als Mittelwerte aus allen Beobachtungen folgt

$$x = 0{,}53$$
$$y = 2{,}7$$

gegen die theoretisch abgeleiteten Werte

$$x = 0{,}4$$
$$y = 3.$$

In der vorstehenden Tabelle stehen in der fünften Kolumne die mit den aus der Beobachtung sich ergebenden Konstanten berechneten Werte von M und in der sechsten Kolumne die Fehler. Da die Beobachtungen keineswegs als Präzisionsmessungen angestellt sind, sondern nur als technische Bestimmungen gelten können, so ist die Übereinstimmung der aus den Messungen sich ergebenden und der theoretisch abgeleiteten Konstanten zufriedenstellend.

2. Schwingungsmasse von Membranen.

Auf drei Bronzemembranen wurden in Luft Zusatzgewichte gesetzt und jedes Mal die Schwingungszahl bestimmt. Stellt n_0 die Schwingungszahl der unbelasteten, n_b diejenige der belasteten Membran dar, während m die Schwingungsmasse der Membran und z die Zusatzmasse ist, dann haben wir die Beziehungen

$$\left(\frac{n_0}{n_b}\right)^2 = \frac{m+z}{m}$$

$$m = \frac{z}{\left(\frac{n_0}{n_b}\right)^2 - 1}.$$

Wir haben diese Methode gewählt, da uns die Unsicherheit in der Berechnung und Bestimmung der Elastizität, wie wir schon oben ausführten, den direkten Weg verbot, die Schwingungsmasse aus der Schwingungszahl der unbelasteten Membran zu berechnen.

In den folgenden Tabellen Va—c steht in der ersten Kolumne die Zusatzmasse z, in der zweiten die dazugehörige Schwingungszahl und in der dritten die hieraus berechnete Schwingungsmasse der Membran.

Tabelle Va.

Membran: Radius = 2,1
Dicke = 0,06
Dichte = 8,5

z	n	m
0	1840	—
2	1200	1,48
4	960	1,50

Mittel: 1,49

Tabelle Vb.

Membran: Radius = 5,1
Dicke = 0,3
Dichte = 8,5

z	n	m
0	1760	—
11	1560	41
30	1350	43
56	1145	41,5
74	1045	40,5
109	920	41
145	840	42,5

Mittel: 41,6

Tabelle Vc.

Membran: Radius = 5,6
Dicke = 0,3
Dichte = 8,5

z	n	m
0	1810	—
2,5	1765	50
5,0	1710	41,5
7,5	1670	44
10	1640	45,5
15	1585	50
20	1530	50

Mittel: 48,5

Bestimmen wir für die drei Membranen den Massenfaktor f, so haben wir die drei Gleichungen

$$1{,}49 = \pi \cdot 2{,}1^2 \cdot 0{,}06 \cdot 8{,}5 \cdot f^2$$
$$41{,}6 = \pi \cdot 5{,}1^2 \cdot 0{,}30 \cdot 8{,}5 \cdot f^2$$
$$48{,}5 = \pi \cdot 5{,}6^2 \cdot 0{,}30 \cdot 8{,}5 \cdot f^2$$

und finden hieraus die drei Werte

$$f = 0{,}46$$
$$f = 0{,}45$$
$$f = 0{,}44$$

und als Mittelwert 0,45, den auch die Kurvenform des eingespannten gleichmäßig belasteten Trägers liefert.

Die Schwingungszahlen dieser drei Membranen weichen aus den oben teilweise angegebenen Gründen (innere Spannung, Art der Befestigung, angenommener Elastizitätsmodul usw.) von der Rechnung ab. Wenn wir in die Formel für die Schwingungszahl die Werte für Bronze

$$E = 10^{12}\ \text{Dyn cm}^2$$
$$\varrho' = 8{,}5$$

einsetzen, so ist

$$n_{\text{Bronze}} = 150 \cdot 10^3 \frac{d}{R^2}.$$

In der folgenden Tabelle VI sind die beobachteten und berechneten Werte und ihre Abweichungen zusammengestellt.

Tabelle VI.

$n_{\text{beob.}}$	$n_{\text{ber.}}$	$n_{\text{ber.}}/n_{\text{beob.}}$
1840	2050	1,11
1760	1730	0,98
1810	1430	0,79

3. Dämpfungsmessungen.

Zur Bestimmung der Strahlungsdämpfung im Wasser wurden drei Bronzemembranen benutzt, in deren Mittelpunkte ein kleiner Eisenanker befestigt war, während mit dem relativ zum Mittelpunkt stillstehenden Rande der Membran ein Telephonmagnet verbunden war. Die durch die Schwingungen der Membran auf diese Weise in den Spulen des Telephonmagneten induzierte elektrische Spannung wurde mittels Gleichrichter und Galvanometer gemessen. Von der Konstanz der Gleichrichterzelle[1]) und der Proportionalität des Ausschlages mit dem Quadrate der Spannung überzeugten wir uns durch öftere Kontrolle mit geshunteter, direkt mit Voltmeter gemessener Maschinenspannung.

Die Membranen wurden in Luft und im freien Wasser in das Schallfeld eines Senders gebracht, der bei veränderlicher Frequenz mit konstanter Kraft erregt wurde. Sein Eigenton lag so weit oberhalb der höchsten benutzten Schwingungszahl, daß der Einfluß seiner eigenen Resonanz nicht berücksichtigt zu werden brauchte. Die erhaltenen Resonanzkurven sind zur Bestimmung der Dämpfung von etwa $^8/_{10}$ bis $^2/_{10}$ des Maximalausschlages benutzt worden und liefern in sich gut übereinstimmende Werte.

In der folgenden Tabelle VII befindet sich in der ersten Kolumne der Radius R, in der zweiten die Dicke d der Membran, in der dritten und vierten die Schwingungszahlen in Luft und Wasser n_l und n_w und in der fünften und sechsten die in Luft und Wasser gemessenen Dämpfungen $\mathfrak{d}_l$ und $\mathfrak{d}_w$.

Tabelle VII.

R	d	n_l	n_w	$\mathfrak{d}_l$	$\mathfrak{d}_w$
2,1	0,06	1312	1000	0,009	0,050
2,1	0,065	1542	1170	0,011	0,053
3,3	0,13	1750	1137	0,032	0,113

Zu erwähnen ist, daß bei den beiden ersten Membranen die Dämpfung in Luft bei ihren natürlichen Luftabstimmungen gemessen wurde, bei der dritten Membran dagegen die Dämpfung in Luft bei der Wasserabstimmung bestimmt wurde, nachdem die Membran in Luft durch ein Zusatzgewicht auf dieselbe Abstimmung wie in Wasser gebracht war. Dies mußte geschehen, da ihre Dämpfung durch Mitschwingen innerer Teile stark beeinflußt war. Dies Verfahren ist entschieden dem bei den beiden anderen Membranen angewandten vorzuziehen, da man sonst, wie es auch hier geschah, voraussetzen muß, daß in dem gemessenen Frequenzgebiet keine störenden Resonanzen sind.

Aus den beobachteten Werten der Dämpfungen in Luft und Wasser, findet man die Strahlungsdämpfung in Wasser folgendermaßen: Die in Luft gemessene Dämpfung setzt sich aus drei Beträgen zusammen: der Strahlungsdämpfung in Luft, der inneren, schädlichen und der magnetisch-elektrischen Dämpfung. Ziehen wir also von der in Luft gemessenen Dämpfung zunächst den berechneten Wert der Strahlungsdämpfung im Betrage von 0,002 ab[1]), so erhalten wir den

1) Wir hatten die Zelle, Silber-Molybdän — ein in der Funkentelegraphie unter dem Namen Hornemann-Zelle bekannter Detektor, — nicht auf größte Empfindlichkeit eingestellt, dafür aber über Monate hin eine Konstanz des Ausschlages bis auf etwa 10 Proz. erreicht. Die Empfindlichkeit der Meßeinrichtung wurde nicht absolut bestimmt, aber durch Vergleich mit hoch empfindlichen Telephonen auf das etwa 0,1—0,01fache von diesen geschätzt.

1) Es ist dies Verfahren zulässig, da die berechnete Luft-Strahlungsdämpfung nur eine wenig Prozent ausmachende Korrektur der beobachteten Wasser-Strahlungsdämpfung ist.

Betrag der schädlichen und magnetisch-elektrischen Dämpfung bei der Luftabstimmung. Um diesen Wert auf die größere Schwingungsmasse bei der Aufnahme in Wasser umzurechnen, multiplizieren wir den Betrag mit dem Quadrat des Verhältnisses der Schwingungszahlen in Wasser und Luft. Wenn man den so erhaltenen Wert von der Wasserdämpfung abzieht, erhält man die Strahlungsdämpfung in Wasser.

In der folgenden Tabelle VIII steht in der zweiten Kolumne der so aus den Beobachtungen gewonnene Wert der Strahlungsdämpfung in Wasser, während in der dritten Kolumne der aus der Formel

$$\delta = 5\,\frac{R}{\lambda}\left(1-\left(\frac{n_w}{n_l}\right)^2\right)$$

berechnete Wert der Strahlungsdämpfung steht und in der vierten Kolumne die prozentuale Differenz zwischen Beobachtung und Berechnung.

Tabelle VIII.

R	$\delta_{beob.}$	$\delta_{ber.}$	beob.—ber.
2,1	0,031	0,031	0 Proz.
2,1	0,041	0,036	+ 14 „
3,3	0,083	0,076	+ 9 „

Die Abweichungen zwischen Beobachtung und Berechnung, die im Mittel nur 8 Proz. betragen, ergeben eine gute Bestätigung der theoretischen Ableitungen. Daß sie nur positiv sind, läßt vermuten, daß vielleicht noch andere nicht berücksichtigte Dämpfungen, z. B. Reibungsdämpfung der Membranoberfläche am Wasser, vorhanden sind und von den Beobachtungen abgezogen werden müßten, um die reine Strahlungsdämpfung zu erhalten.

Kiel, im Mai 1917.

(Eingegangen 18. Mai 1917.)

Ein Farbenmeßapparat.

Von A. v. Hübl.

Die im gewöhnlichen Leben übliche Bezeichnung der Farben ist für die Zwecke der Wissenschaft und auch für viele Zweige der Technik völlig unbrauchbar und es wurde daher mehrfach der Versuch gemacht, ein Farbensystem zu schaffen, das eine zahlenmäßige Definition aller Farben ermöglicht.

In neuester Zeit beschäftigt sich Wi. Ostwald[1]) mit diesem Problem und es ist zu erwarten, daß die Arbeiten dieses so erfolgreichen Forschers auch auf diesem Gebiete bahnbrechend wirken werden.

1) Diese Zeitschr. 17, 322, 1916.

Die Ostwaldsche Farbendefinition stützt sich auf einen 100teiligen Farbenkreis, dessen Elementen eine ganz bestimmte, jederzeit auffindbare Lage zukommt und jede Körperfarbe wird als ein Gemenge betrachtet, das aus einem dieser Farbentöne mit bestimmten Mengen Schwarz und Weiß besteht.

Alle anderen in dieser Beziehung gemachten Vorschläge gehen von der Tatsache aus, daß sich jede Farbe durch ein Gemisch von drei passend gewählten Grundfarben nachbilden läßt und daß man daher auch jede Farbe als aus diesen drei Komponenten bestehend ansehen kann. Das durch Zahlen ausgedrückte Verhältnis dieser, in einer Farbe scheinbar vorhandenen Grundfarben bildet die Farbendefinition.

Zur Ermittlung derselben kann man zwei verschiedene Wege einschlagen: Entweder trachtet man durch eine Art Farbenanalyse die Zusammensetzung der Farbe zu ermitteln, oder man vereinigt die drei Grundfarben zu einer der Originalfarbe gleichen Mischung und erfährt so, auf synthetischem Wege, das gesuchte Grundfarbenverhältnis.

Die analytische Methode dürfte zuerst von E. Detlefsen[1]) vorgeschlagen worden sein und wurde in neuerer Zeit von Dr. L. Bloch[2]) weiter ausgestaltet und warm empfohlen.

Um die Zusammensetzung einer Farbe in dieser Weise zu ermitteln, betrachtet man den Körper durch ein rotes, grünes und blaues Filter und bestimmt in passender Weise, am einfachsten durch Vergleich mit einer aus grauen Papieren gebildeten Skala, die Helligkeit des nun farblos erscheinenden Objektes. Hätte man z. B. gefunden, daß der Körper unter dem Rot-, Grün- und Blaufilter das Aussehen grauer Papiere von der Helligkeit 0,8, 0,5 und 0,1 zeigt, so remittiert er ein Lichtgemisch, das aus

0,8 Rot + 0,5 Grün + 0,1 Blau

besteht und diese Zahlen definieren seine Farbe.

Die Resultate einer solchen Analyse wären aber nur richtig, wenn die drei Filter das ganze Spektrum umfassen, also scharf begrenzte, aneinanderschließende Öffnungen besitzen würden.

Da das aber nicht der Fall ist, und da die Filteröffnungen eng gewählt werden müssen, damit der zu untersuchende Körper farblos erscheint, so tasten wir sein Absorptionsband nur an drei schmalen Stellen ab und schließen aus den dort vorhandenen Schwärzungen auf alle Eigentümlichkeiten der Farbe.

Die drei Filter sind willkürlich gewählt, die

1) D.R.P. Nr. 162888. Kl. 42, 1904.
2) Photographische Korrespondenz S. 390, 1916.

Resultate daher ohne inneren Zusammenhang und mit dem Aussehen der Farbe oft nicht in Übereinstimmung. Bei der Untersuchung schmalbandiger Pigmente, zu denen zahlreiche Teerfarbstoffe gehören, machen sich diese Fehler besonders auffallend geltend, während bei farbigen Körpern mit breiten, flach verlaufenden Absorptionsbändern relativ günstige Resultate zu erzielen sind.

Für die meisten Zwecke der Technik ist aber eine bloße Definition der Farben nicht genügend, man fordert vielmehr auch, daß sich die Farbe auf Grund ihrer Definition jederzeit und an jedem Orte objektiv herstellen läßt.

Bei den synthetischen Methoden ist das möglich, denn die zur Ermittlung der Farbendefinition dienenden Farbenmischapparate gestatten selbstverständlich auch umgekehrt die Reproduktion einer Farbe auf Grund der mit dem gleichen Apparat gefundenen Zahlen.

Die zu mischenden Farbenelemente bestehen bei diesen Apparaten entweder aus purpurroten, gelben und grünlichblauen Farbstoffschichten, in Form abgestufter Skalen, die man durch Übereinanderlegen kombiniert oder aus roten, grünen und blauen Lichtern, die additiv vereint werden.

Die Farbenmischapparate der ersten Art wie der Farbenanalysator von Kallab, das Aronsche Chromoskop, der Farbenprüfer von Klemperer haben den Nachteil, daß sie sich zur Nachbildung reiner, satter Farben nicht eignen, daß fehlerfreie Skalen aus Pigmentschichten kaum herzustellen sind und daß den subtraktiv entstehenden Mischfarben die strenge Gesetzmäßigkeit fehlt, da das Aussehen einer Farbe mit ihrer durch Farbstoffmischung gefundenen Zusammensetzung oft nicht im Einklange steht. Vollkommen frei von diesen Mängeln sind dagegen jene Apparate, bei welchen die Nachbildung der Farben durch additive Mischung farbiger Lichter erfolgt, wobei diese entweder aus dem Spektrum isoliert oder mit Hilfe von Lichtfiltern gewonnen werden.

Benutzt man Lichtfilter, so muß zunächst bezüglich ihrer Farbe eine Entscheidung getroffen werden und es unterliegt keinem Zweifel, daß dem gedachten Zwecke am besten Farben von der Beschaffenheit der Young-Helmholtzschen Grundfarben entsprechen würden.

Die verschiedenen Versuche zur Ermittlung dieser Farben haben aber kein einheitliches Resultat ergeben und eigentlich lehren sie uns nicht mehr, als daß sich mit den drei Farben: Rot, Grün und Blau alle spektralen und daher auch alle Körperfarben am besten nachbilden lassen. Die im Mischapparat zur Verwendung kommenden drei Lichter müssen daher diesen Farben, die man als Zinnoberrot, Grün und Ultramarinblau bezeichnen kann, entsprechen.

Weitere Anhaltspunkte für die Wahl ganz bestimmter Farbentöne stehen uns aber nicht zur Verfügung und tatsächlich genügt es auch, wenn die drei Filter nur ungefähr diesen Farben entsprechen, denn sie sind dann zur Wiedergabe aller Farben, welchen wir im gewöhnlichen Leben begegnen, geeignet.

Bei diesen Farbenmischapparaten bietet die Einrichtung zur additiven Vereinigung der drei Lichter einige konstruktive Schwierigkeiten, die sich am einfachsten durch Benutzung transparenter Spiegel überwinden lassen. Ein solcher Spiegelapparat, der zur Definierung und Reproduktion von Körperfarben und ebensogut auch zur Farbenbestimmung künstlicher Lichter brauchbar ist, soll in nachfolgenden Zeilen beschrieben werden.

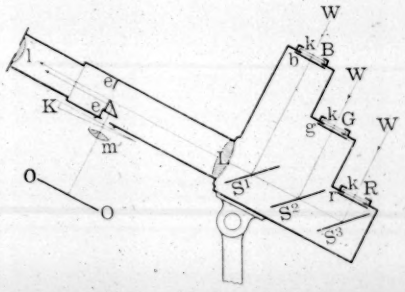


Fig. 1.

Aus Fig. 1 ist in schematischer Darstellung dessen Einrichtung ersichtlich und Fig. 2 zeigt eine Ansicht desselben.

Ein stufenförmig gestaltetes Kästchen besitzt bei R, G und B Öffnungen, die mit den drei Lichtfiltern[1]) r, g, b belegt sind und bei S_1 S_2 S_3 sind drei als Spiegel wirkende schwach versilberte Glasplättchen angebracht. Dadurch werden die Bilder der drei farbigen Öffnungen gegen die Linse L reflektiert, die ein verkleinertes Bild derselben in der Ebene ee entwirft. Betrachtet man dasselbe mit der Lupe l, so gelangt ein Gemisch von Strahlen der drei

1) Die Lichtfilter bestehen aus Glasplättchen, die mit gefärbter Gelatine überzogen sind, wozu nachstehende Farbstoffmischungen benutzt wurden:
Rot: Tartrazin 2,0 + Erythrosin 1,0 + Säurerhodamin 0,04.
Grün: Tartrazin 2,0 + Patentblau 0,8.
Blau: Patentblau 1,0 + Säurerhodamin 2,0.
Die Zahlen bedeuten Farbstoffdichten, also die Farbstoffmengen in Grammen pro Quadratmeter Filterfläche. Sämtliche Farbstoffe sind chemisch rein bei den Höchster Farbwerken erhältlich.

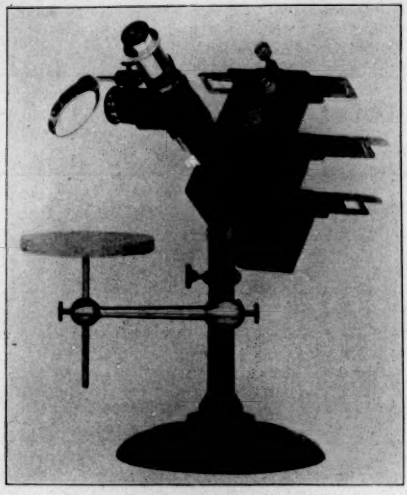


Fig. 2.

Filterfarben in unser Auge und bei passender Wahl ihrer Helligkeiten erscheint das Gesichtsfeld weiß.

Über den drei Öffnungen R, G, B sind verschiebbare Keile k aus einer neutral grauen Masse — etwas Glas oder Gelatine — angeordnet, welche das auf die Filter fallende weiße Licht W beliebig abzuschwächen gestatten[1]).

Durch Verschieben der Keile kann man jede beliebige Mischung von roten, grünen und blauen Lichtstrahlen herstellen und durch die Lupe l sieht man das Gesichtsfeld in der jeweilig gebildeten Mischfarbe beleuchtet.

Um diese Farbe mit der Farbe eines beliebigen Objektes O vergleichen zu können, ist in der Bildebene ee ein kleines rechtwinkliges Prisma oder ein Lummer-Brodhunscher Würfel angebracht, welches die Farbe des Objektes gegen unser Auge reflektiert. Wir sehen dann das halbe Gesichtsfeld in der Farbe des Objektes und durch Verschieben der drei Keile kann man die zweite Hälfte des Gesichtsfeldes in gleicher Farbe einstellen.

Das Verstellen der Keile erfolgt durch Zahngetriebe und kann an Millimeterstäben abgelesen werden.

1) Derartige aus geschwärzter Gelatine bestehende Keile lassen sich leicht nach dem von E. Goldberg angegebenen Verfahren herstellen, das in der „Zeitschrift für wissenschaftliche Photographie" S. 238, 1912 ausführlich beschrieben ist.

Das Prisma ist, um die Zeichnung leichter verständlich zu machen, unter der Rohrachse dargestellt, es liegt aber tatsächlich seitwärts derselben und dementsprechend hat man sich auch, wie Fig. 2 zeigt, das Objekt seitwärts des Apparates zu denken. Zur Aufnahme desselben dient ein horizontales Tischchen, über welchem sich ein unter 45° geneigter Spiegel befindet, der im Vereine mit der Linse m und dem Vergleichsprisma ein Bild des Objektes in das Auge des Beobachters reflektiert.

Der Apparat ist für die Untersuchung undurchsichtiger Körper und transparenter Schichten gleich gut geeignet und es ist auch möglich die Farbe eines entfernten Objektes zu bestimmen, wenn man dasselbe mit Hilfe der Linse m in das Gesichtsfeld projiziert. Bei Objekten von nicht homogener Färbung, z. B. melierten Stoffen, verstellt man die Linse derart, das sie ein unscharfes Bild entwirft, wodurch eine gleichmäßige Mischfarbe zustande kommt, die sich anstandslos nachbilden läßt.

Der Apparat kann nur bei Tageslicht, und zwar am besten bei gleichmäßig bedecktem, oder wolkenlosem Himmel gebraucht werden und er wird in diesem Falle direkt gegen das Firmament gerichtet. Bei teilweiser Bewölkung wird vor dem Apparat eine große Mattscheibe oder ein Schirm aus paraffiniertem Papier aufgestellt. Ist die Helligkeit des Lichtes nicht konstant, so ist eine sichere Farbeneinstellung kaum möglich, doch kann man den störenden Einfluß der Helligkeitsschwankungen wenigstens zum Teile dadurch beseitigen, daß man jenen Teil des Firmamentes, gegen den der Apparat gerichtet ist, auch für die Beleuchtung des Objektes benutzt, indem man ihn mit Hilfe einer Linse auf dieses projiziert.

Die Analyse einer Körperfarbe erfolgt in nachstehender Weise: Zunächst bringt man bei O ein rein weißes Papier an und verstellt die Keile derart, daß beide Hälften des Gesichtsfeldes weiß und gleich hell erscheinen, wobei man zum Ausgleich der Helligkeiten den verschiebbaren Keil K, der vor dem Vergleichsprisma angebracht ist, benutzt.

Die Lage der drei Keile entspricht jetzt ihren Nullstellungen.

Dann ersetzt man die weiße Papierfläche durch das zu prüfende Objekt derart, daß dessen Ebene in die frühere Papierebene zu liegen kommt, damit beide Flächen die gleiche Beleuchtung erfahren und stellt durch Verschieben der Keile k mit Hilfe der Zahntriebe die gleiche Farbe in beiden Gesichtshälften her. Aus der dabei notwendigen Keilverschiebung läßt sich die Schwächung der drei Lichter ermitteln, und

wenn man deren Helligkeiten bei der Einstellung auf Weiß als Einheiten betrachtet, so bildet die nach der Farbeneinstellung noch übrigbleibende Rot-, Grün und Blauhelligkeit die gesuchte Farbendefinition.

Mußte der Keil über dem Rotfilter z. B. um a cm verstellt werden und wäre k die „Keilkonstante", d. i. die Dichtezunahme des Keils pro Zentimeter Länge, so ist das Rotlicht durch die Grauschicht $d = a \cdot k$ geschwächt und die übrigbleibende Helligkeit i_r der roten Komponente ist durch die Relation $d = -\log. i_r$ gegeben.

In gleicher Weise findet man die Helligkeiten i_g und i_b der grünen und blauen Grundfarbe.

Bei der Nachbildung der Farbe, z. B. die das Umschlagpapier dieser Zeitschrift zeigt, mußten die Keile über den roten, grünen und blauen Filter um 13, 17 und 29 mm verschoben werden. Die Konstante der drei Keile war mit $k = 0{,}25$ ermittelt worden und die Helligkeiten der drei Lichter sind somit $i_r = 0{,}47$, $i_g = 0{,}38$ und $i_b = 0{,}19$.

Mit diesen drei Zahlen ist die Farbe des Papiers vollkommen bestimmt.

Statt der Dezimalbrüche dürfte es sich empfehlen, die mit 100 multiplizierten Zahlen zu benutzen und ein für allemal festzusetzen, daß sie stets in der Reihenfolge Rot, Grün, Blau gebraucht werden. Die in obigem Beispiel erwähnte Farbe wird dann durch die Zahlen 47, 38, 19 definiert und auf Grund dieser Angabe ist es auch möglich die Farbe in einem zweiten Apparat einzustellen und für jedermann sichtbar zu machen.

Aus diesen Zahlen können wir uns aber auch eine Vorstellung über das farbige Aussehen des Körpers bilden, denn aus ihnen läßt sich nicht nur der Farbenton ableiten, sondern auch der Weißgehalt und die Schwärzlichkeit, also jene Eigentümlichkeiten einer Farbe, welche die Ursache sind, daß sie uns gleichsam verdünnt und verdunkelt erscheint.

Den besten Einblick in diese Verhältnisse bietet eine graphische Darstellung der Farbe, doch dürfte es zunächst geboten sein, die beiden Begriffe: Weißgehalt und Schwärzlichkeit etwas näher zu erörtern.

Der Weißgehalt einer Farbe oder ihre Weißlichkeit hängt von der Menge des weißen Lichtes ab, die das Pigment zurückwirft, wobei es gleichgültig ist, ob dieses weiße Licht aus allen Strahlen des Spektrums oder nur aus komplementären Teilen desselben besteht. Als Maß für die Menge des weißen Lichtes dient dessen Helligkeit, wobei man annimmt, daß eine weiße Fläche, die analog dem farbigen Körper beleuchtet wird, Licht von der Helligkeit Eins remittiert. Ist daher im Strahlengemisch, das ein farbiger Körper zurückwirft, weißes Licht von etwa $^1/_2$ oder $^1/_4$ dieser Helligkeit vorhanden, so bezeichnet man den Weißgehalt dieser Farbe mit $^1/_2$ oder $^1/_4$.

Die weißen Strahlen verringern die Farbenintensität und das, was man „Sättigung" einer Farbe nennt, ist lediglich von ihrem Weißgehalt abhängig.

Die Schwärzlichkeit dagegen läßt sich nicht so einfach definieren. Als schwärzlich oder „unrein" bezeichnen wir nämlich die Farbe eines Körpers, wenn ihre Helligkeit geringer ist, als sie bei gleichem Farbenton und gleicher Weißlichkeit sein könnte.

Zeigen also zwei Pigmente gleiche Farbe und gleiche Weißlichkeit, so kann man aus ihrem Aussehen leicht entscheiden, ob eines schwärzlicher ist als das andere. Besitzen sie aber verschiedene Farben oder verschiedenen Weißgehalt, so wird unser Urteil höchst unsicher und den Grad der absoluten Schwärzlichkeit vermögen wir überhaupt auch nicht annähernd anzugeben, da wir nicht wissen, welche Körperfarbe als vollkommen rein, d. h. frei von jeder Schwärzlichkeit zu betrachten ist. Man muß also zunächst den Begriff der reinen Körperfarbe feststellen, ehe man von einem Maß der Schwärzlichkeit sprechen kann.

Ein Anhaltspunkt für die Beantwortung dieser Frage ergibt sich aus der Betrachtung der spektralen Eigentümlichkeiten der Körperfarben.

Das Spektrum besteht nämlich aus drei fast gleichmäßig rot, grün und blau gefärbten Zonen, die man als die wesentlichen Bestandteile aller Körperfarben betrachten kann. Rote, grüne und blaue Körper remittieren nur die Strahlen je einer dieser Zonen; Gelb, Blaugrün und Purpur entstehen aus zwei Zonen und alle zwischenliegenden Übergangsfarben können aus allen Strahlen einer Zone und Teilen einer zweiten gebildet werden.

Die so zustande kommenden Körperfarben wären als vollkommen rein zu betrachten.

Ist aber in den von einem Pigment remittierten Strahlen keine der drei Spektralzonen ganz vertreten, so ist es gerechtfertigt, die Farbe als schwärzlich zu bezeichnen. Dabei ist es gleichgültig, ob diese Zone gleichmäßig geschwächt oder ob sie durch ein Absorptionsband verengt ist, so daß sie nur mit einem Teil ihrer Strahlen, die aber volle Intensität besitzen, zur Geltung kommt. In beiden Fällen kann das gleiche schwärzliche Aussehen hervorgerufen werden.

Die so festgelegte Weißlichkeit und Schwärz-

lichkeit läßt sich aus den drei Helligkeitszahlen leicht ermitteln. Das erwähnte Papier ergab z. B. die Zahlen 0,47, 0,38, 0,19 und trägt man diese Werte in der aus nebenstehender Fig. 3

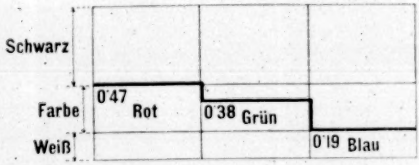


Fig. 3.

ersichtlichen Weise nebeneinander auf, so erhält man eine graphische Darstellung dieser Körperfarbe, welche deren Eigentümlichkeiten leicht übersehen läßt.

Gleiche Mengen der drei Farben geben Weiß und daher remittiert das Papier 0,19 Weiß, also etwa den fünften Teil jenes farblosen Lichtes, das eine rein weiße Fläche bei gleicher Beleuchtung zurückwerfen würde.

Farbenbildend sind somit nur

0,28 Rot + 0,19 Grün

und da durch ein Gemenge gleicher Quantitäten Rot und Grün die Empfindung Gelb bedingt wird, so kann man sich diese Farbe auch zusammengesetzt denken aus

0,09 Rot und 0,19 Gelb.

Sie entspricht also einem rötlichen Gelb und das Verhältnis Gelb : Rot ist 2 : 1.

Auch die Schwärzlichkeit ist leicht zu ermitteln, denn die drei farbigen Lichter im Mischapparat entsprechen bezüglich Farbenton und Helligkeit den aus den drei Spektralzonen gebildeten Farben, und man hat daher eine Körperfarbe als rein zu betrachten, wenn bei ihrer Nachbildung wenigstens eine Mischkomponente mit voller Helligkeit zur Verwendung kommen muß. Im vorliegenden Falle mußten aber alle drei Lichter abgeschwächt werden und daher ist die Helligkeit dieser Farbe geringer als sie bei gleicher Weißlichkeit sein könnte.

Die volle Reinheit würde dieses rötliche Gelb zeigen, wenn die Helligkeit der Rotkomponente gleich 1,0 wäre und da diese nur 0,47 ist, so ist 1,00 — 0,47 = 0,53 die vorhandene Schwärzlichkeit.

Die Schwärzlichkeit hat hier die gleiche Bedeutung, wie der Schwarzgehalt einer Graumischung am Kreisel: die volle Kreisscheibe entspricht der Helligkeitseinheit und ein Grau von der Schwärzlichkeit 0,53, also von der Helligkeit 0,47 kommt zustande, wenn 0,53 der Kreiselfläche (191°) schwarz gedeckt ist.

Für die in Rede stehende Körperfarbe ergibt sich also, wenn man die mit Hundert multiplizierten Zahlen einführt, nachstehende Zusammensetzung:

28 Farbe bestehend aus $\begin{cases} 28 \text{ Rot} \\ 19 \text{ Grün} \end{cases}$ oder $\begin{cases} 9 \text{ Rot} \\ 19 \text{ Gelb} \end{cases}$

19 Weiß und

53 Schwarz[1]).

Die so gefundenen Zahlen entsprechen der objektiven Zusammensetzung einer Körperfarbe; sie gestatten aber nicht, ohne weiteres einen Schluß zu ziehen auf die Farbe, die wir bei der Betrachtung dieses Körpers wahrnehmen.

Die Lichter werden eben nicht entsprechend ihren Helligkeiten empfunden, sondern proportional einer logarithmischen Funktion derselben und daher kommt das Weiß übermäßig zur Geltung, während sich das vorhandene Schwarz viel zu wenig bemerkbar macht; das zeigt sich auch deutlich bei Betrachtung des besprochenen Papiers, das viel heller und weißlicher aussieht, als man auf Grund der gefundenen Farbenzusammensetzung, etwa $^1/_3$ Farbe + $^1/_3$ Weiß + $^1/_2$ Schwarz annehmen sollte.

Daß die mit dem Mischapparat gefundenen Zahlen die tatsächliche Zusammensetzung einer Körperfarbe angeben, daß sie mehr sind als konventionelle Kennziffern, läßt sich mit am Kreisel hergestellten Farbengleichungen nachweisen. So wurde z. B. die Farbe des eben besprochenen gelblich grauen Papiers mit Hilfe einer roten, gelben, weißen und schwarzen Papierscheibe am Kreisel nachgebildet, wobei die Gleichung:

65° Rot + 95° Gelb + 55° Weiß + 145° Schwarz = 360° Gelbgrau

erhalten wurde.

Der Mischapparat definiert die Farben des roten und gelben Papiers mit den Zahlen: 40, 9, 4 und 92, 77, 6 und der Weißgehalt der schwarzen Scheibe wurde mit 3 Proz. ermittelt. Es remittieren daher:

65° rotes Papier:	26 Rot	+	6 Grün	+	3 Blau
95° gelbes „	87 „	+	73 „	+	6 „
59° weißes „	59 „	+	59 „	+	59 „
Und die ganze Kreiselfläche .	172 Rot	—	138 Grün	—	68 Blau
Die von 360° graugelben Papier remittierten Strahlen bestehen aus	169 Rot	—	137 Grün	—	68 Blau.

1) Wi. Ostwald fand für dieses Papier die Farbendefinition 07, 31, 16, womit gesagt ist, daß die Farbe aus 0,31 reiner Farbe und 0,16 Weiß besteht und daß ihr Farbenton jenem der Karte Nr. 7 gleichkommt. (Diese Zeitschr. 17, 357, 1916.) Die Karte Nr. 7 gab bei der Analyse mit dem Mischapparat die Zahlen 97, 67, 7, daher entspricht ihr Farbenton einer Mischung, bestehend

Für die rot-gelb weiße und die gelblichgraue Kreiselscheibe wird daher das genau gleiche Farbengemisch gefunden und das ist nur möglich, wenn die Angaben des Mischapparates die wirkliche Zusammensetzung der Farben definieren.

Um die Farbe eines künstlichen Lichtes zu ermitteln, richtet man den Apparat gegen den weißbewölkten Himmel, und benutzt an Stelle des Objektes eine weiße Fläche, die man mit der zu untersuchenden Lichtquelle beleuchtet und die selbstverständlich gegen den Einfall von Tageslicht in passender Weise geschützt werden muß.

In dieser Weise wurden z. B. gefunden:
Für eine Metallfadenlampe:

100 Rot + 56 Grün + 13 Blau.

Für eine Vericolampe:

100 Rot + 79 Grün + 21 Blau.

Die Vericolampe ist eine Metallfadenlampe mit hellblauer Glashülle, wodurch der Rotstich des Lichtes verringert werden soll.

Wird die stromlose Lampe zur Ermittlung der Farbe des Glases vor den Apparat geschaltet, so ergeben sich die Zahlen $d = 0{,}62$, 0,30, 0,22 und da sie für das blaue Glas in doppelter Schichte gelten, so wird die einfache Glasschichte durch die Dichten $d = 0{,}31$, 0,15, 0,11 definiert. Das als Filter wirkende blaue Glas besitzt daher für Rot, Grün und Blau die Durchlässigkeiten $i = 0{,}49$, 0,71, 0,77 und das Licht der Vericolampe muß daher aus:

$$100 \times 0{,}49 = 40 \text{ Rot}$$
$$56 \times 0{,}71 = 40 \text{ Grün}$$
$$13 \times 0{,}77 = 10 \text{ Blau}$$

bestehen. Die Zahlen stimmen mit den oben angegebenen, für diese Lampe gefundenen, sehr gut überein, denn sie entsprechen dem Farbenverhältnis 100 : 82 : 20.

Der Apparat ermöglicht es auch, zu jeder beliebigen Licht- oder Körperfarbe die zugehörige Komplementärfarbe zu ermitteln und sie kann neben der gegebenen Farbe eingestellt und jedermann vorgezeigt werden.

Auch das Resultat einer Mischung mehrerer Farbstoffe läßt sich auf Grund ihrer Definition ermitteln und man kann auch das Verhältnis bestimmen, in welchem die Farbstoffe zu mischen sind, damit ein bestimmter Farbenton entsteht. Allerdings können die so gefundenen Resultate nur ungefähr zutreffen, da bei Konzentrationsänderungen und gegenseitiger Mischung von Farbstoffen oft auffallende Unregelmäßigkeiten auftreten, aber die Möglichkeit solche Aufgaben, wenn auch nur annähernd zu lösen, zeigt, daß der Farbenmeßapparat nicht nur eine präzise Farbenbezeichnung ermöglicht, sondern auch auf verschiedenen farbentechnischen Gebieten von einiger Bedeutung sein dürfte.

Bemerkt muß noch werden, daß der zur Verfügung stehende Apparat, weil nur provisorisch zusammengestellt, ziemlich unvollkommen war, und daß nur durch Bildung von Mittelwerten aus einer größeren Zahl von Einstellungen zutreffende Farbendefinitionen zu erhalten waren. (Eingegangen 21. Mai 1917.)

aus 90 Rot + 60 Grün = 60 Gelb + 30 Rot und das Verhältnis Gelb : Rot ist 2 : 1.

Ein Vorlesungs-Elektroskop.

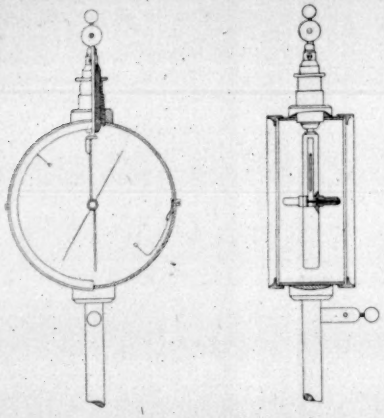
Von H. Haga.

Bei vielen elektrostatischen Vorlesungsversuchen braucht man ein Elektroskop von mittelmäßiger Empfindlichkeit, wo das Exnersche Elektroskop zu empfindlich und ein Papierelektroskop zu unempfindlich ist. Sehr viel wird das Kolbesche Elektroskop benutzt; doch hat dieses einige unangenehme Eigenschaften, welche wohl jedem bekannt sind, der mit diesem Apparat gearbeitet hat. Es sind diese Erfahrungen, die mich veranlassten zu versuchen, das Braunsche Elektrometer für Projektion einzurichten. In der Werkstätte des Instituts wurde ein Braunsches Elektrometer in kleinen Dimensionen angefertigt; es zeigte sich aber ganz unbrauchbar durch die zu große Reibung an den Spitzen der Achse.

Das Ziel wurde aber völlig erreicht durch ein als Achse zu nehmendes horizontal gespanntes vergoldetes Silberbändchen, wie es als Aufhangdraht bei Spiegelgalvanometern benutzt wird. Dadurch entstand ein Elektroskop von so angenehmer und tadelloser Wirkung, daß ich mir erlaube eine Beschreibung des Instruments zu geben.

Die Abbildungen zeigen das Instrument in ungefähr $^2/_5$ der wahren Größe. Der feste Metallstreifen wird durch ein 3 mm dickes, 4,5 cm langes Messingstäbchen getragen, welches durch Ambroid isoliert ist. Die Nadel ist aus einem 0,05 mm dicken Aluminiumblatt geschnitten; zur Erhöhung der Stabilität wurde auf dem größten Teil der Längsseite eine untiefe Furche eingepreßt. Das 27 mm lange, 0,17 mm breite und 7 μ dicke vergoldete Silberbändchen wurde mit einer Spur Schellack auf der Nadel befestigt, das Schellack mit ein wenig Goldbronze überdeckt. Das Bändchen ist zum größten Teil von einem Messingröhrchen umgeben, an dessen Enden es angelötet war.

Zur Vermeidung zu großer Ausschläge ist ein am Metallgehäuse befestigtes, federndes Metalldrähtchen angebracht; das Ende dieser Hemmung ist von einem ganz dünnen Glasröhrchen umgeben, so daß die Nadel bei etwaiger



Berührung nicht entladen wird. Was die Ablesung betrifft, so könnte man in bekannter Weise eine verteilte Skala auf einem Glimmerstreifen im Gehäuse anbringen. Ich habe eine auf dem Projektionsschirm angebrachte Skala — ein in 45 Teile geteiltes Quadrat — vorgezogen, wozu ein, wie eine Wandtafel mit Holzrollen versehener, 1,5 × 1,5 m großer Bogen Zeichenpapier völlig genügt.

Die Empfindlichkeit hängt bei derselben Nadel und demselben Bändchen von der Entfernung des Schwerpunktes unter der Achse ab; sie läßt sich also durch Abschneiden kleiner Stückchen der Nadel oder durch Beschweren der einen Hälfte (ein wenig Bronzepulver in der Furche) leicht regulieren.

Die Firma N. V. vorher P. J. Kipp & Zonen, Delft, hat die Anfertigung dieses Elektroskops übernommen.

Selbstverständlich könnte man eine viel größere Empfindlichkeit erreichen, wenn man einen dünnen Draht als Achse nimmt (das Gewicht der oben beschriebenen Nadel ist etwa 20 mg) und dadurch die Empfindlichkeit der gewöhnlichen Blattelektroskope erhalten ohne die Beschwerden der Kri-Kri-Erscheinung.

Auch wäre es ganz gut möglich, durch Anwendung von Spiegelablesung, das Instrument für genaue Messungen geeignet zu machen. Ein kleines leichtes Planspiegelchen ließe sich zu diesem Zweck an das Silberbändchen kitten; in einen Quadranten des Metallzylinders wäre eine schmale, spaltförmige Öffnung anzubringen und zu bedecken durch eine Skala auf Zelluloid oder Zellon; ein kleines horizontales Fernröhrchen (z. B. von der Größe des Fernröhrchens beim Kohlrauschschen Vierstabvariometer) ließe sich leicht in bequemer Weise anbringen.

In diesem Falle wäre auch Innenisolation zu empfehlen und das Bedecken oder Ersetzen der Glasscheiben durch Metall.

Physikal. Institut der Universität Groningen.

(Eingegangen 22. Mai 1917.)

Der erste Elektronenring der Atome.

Von P. Debye.

Die K-Serie der Röntgenspektren soll bekanntlich im Bohrschen Sinne erzeugt werden von einem Elektron, das sich in unmittelbarster Nähe des positiven Kernes befindet. Der Bau derselben muß uns also über das Aussehen dieses innersten Teiles der Atome Aufschluß geben können. Beschränken wir uns zunächst auf die Hauptlinie der K-Serie $K_{\alpha 1}$ (welche nach Siegbahn[1]) bei Na mit der Ordnungszahl 11 eine Wellenlänge von $11{,}951 \cdot 10^{-8}$ cm und bei Neodym mit der Ordnungszahl 60 die Wellenlänge $0{,}292 \cdot 10^{-8}$ cm hat), dann kann man den Schluß auf die alleinige Wirksamkeit des Atomkernes mit seiner nächsten Umgebung auf Grund der Interpolationsformeln machen, welche bis jetzt zur Darstellung jener Linie als Funktion der Ordnungszahl z des Kernes vorgeschlagen worden sind. Die älteste derselben lautet

$$\frac{\nu}{R} = (z-1)^2\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right), \qquad (1)$$

wenn mit R die Rydbergsche Konstante bezeichnet wird, welche nach Bohr mit der Elektronenladung ε, der Elektronenmasse μ und dem Wirkungsquantum h zusammenhängt mittels der Formel

$$R = \frac{2\pi^2 \mu \varepsilon^4}{h^3}$$

und der nach spektroskopischen Messungen der Wert

$$R = 2{,}7337 \cdot 10^{15}\ \frac{1}{\text{sec}}$$

in Schwingungszahlen (mit Lichtgeschwindigkeit $= 3{,}0000 \cdot 10^{10}$), bzw. der Wert

$$R = 109740\ \frac{1}{\text{cm}}$$

in Wellenzahlen zukommt.

Neuerdings hat Sommerfeld[2]) auf Grund seiner Überlegungen über die Komplexität der Linien von K- und L-Serie der Formel für die $K_{\alpha 1}$-Linie die Gestalt gegeben

1) Man vergleiche den zusammenfassenden Bericht im Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 13, 296, 1916.
2) Ann. d. Phys. 51, 1, 1916 u. 51, 126, 1916.

$$\frac{\nu}{R} = \frac{(z-1{,}6)^2}{1^2} - \frac{(z-3{,}5)^2}{2^2}. \qquad (2)$$

Dabei sind dann außerdem die ν der Formel nicht die direkt beobachteten, sondern diejenigen Schwingungszahlen, welche aus den beobachteten hervorgehen, nachdem man durch Anbringen einer Korrektion die Veränderlichkeit der Elektronenmasse eliminiert hat.

Konnte man die ältere Formel (1) noch so auffassen, daß der Kern durch ein Elektron abgeschirmt wurde und deshalb nur mit der Ladung $(z-1)\varepsilon$ wirkt, so ist Ähnliches bei der Formel (2) nicht mehr möglich, wenn man nicht mit Ehrenhaft auch Bruchteilen der Elektronenladung eine Existenzmöglichkeit zuschreiben will.

Da die Formel (2) nun der zuerst angegebenen in der Tat bedeutend überlegen ist, spitzt sich also nach Sommerfeld[1]) die Frage darauf zu, für die Zahlen 1,6 und 3,5 eine Erklärung zu finden in der Elektronenanordnung der zunächst dem Kern befindlichen Elektronen. Genau formuliert würde die Frage also folgendermaßen lauten: Wie ordne ich Elektronen an, damit einem einzelnen Elektron, das sich in dem vom Kern und den zuerst genannten Elektronen erzeugten Felde bewegt, für eine Bahn mit einem Wirkungsquantum die Energie

$$-\frac{(z-1{,}6)^2}{1^2}hR$$

und für eine Bahn mit zwei Wirkungsquanten die Energie

$$-\frac{(z-3{,}5)^2}{2^2}hR$$

zukommt?

Die K_{α_1}-Linie würde dann nach dem zweiten Bohrschen Ansatze erzeugt werden, indem das eine Elektron von der zweiquantigen auf die einquantige Bahn übergeht.

Würde das gelungen sein, dann hätte man über den innersten Teil des Atoms klaren Aufschluß erhalten, und zwar würde die Angabe über die gemachte Elektronenanordnung nun offenbar für alle Atome zugleich Gültigkeit haben. Im folgenden möchte ich zeigen, daß die Frage, so wie sie eben formuliert wurde, nicht richtig gestellt ist. Das Bild, welches man sich bei der betreffenden Formulierung von der Entstehung der K_{α_1}-Linie gemacht hat, betont die Wasserstoffähnlichkeit jener Linie zu stark. Tatsächlich ist die Formel (2) nur eine empirische Interpolationsformel und ist es insbesondere nicht gestattet, die beiden einzelnen Terme als Maß für die Energie zweier durch die Quantenzahl differenzierten Bahnen eines Elektrons anzusehen.

Vielmehr liegt die Sache, wie das im folgenden begründet werden soll, folgendermaßen: Im Innern des Atoms gibt es zunächst dem Kerne einen ersten Elektronenkreis, auf dem drei Elektronen in gleichen Winkelabständen mit je einem Wirkungsquantum behaftet um den Kern $z\varepsilon$ rotieren. Aus diesem Kreise kann ein Elektron entfernt werden und mit zwei Quanten versehen allein auf eine kreisähnliche Bahn gebracht werden, während die zwei übrig gebliebenen Elektronen nun dem Kern näher rücken und in 180° Winkelabstand einen neuen Kreis um den Kern beschreiben. Der Übergang der drei Elektronen von der zweiten Anordnung in die erste erzeugt die K_{α_1}-Linie. Die so formulierte Aussage erhält ihr besonderes Gepräge durch den Umstand, daß nunmehr nicht ein Elektron, sondern deren drei gleichzeitig an der Entstehung der K_{α_1}-Linie beteiligt sein sollen[1]).

Zu der Auffassung, daß die Sachlage sich in dem eben auseinandergesetzten Sinne klären würde, wurde ich geführt durch die Tatsache, daß die Barkla-Wagnersche Absorptionsbandkante, welche offenbar mit der K-Serie verknüpft ist, beobachtet wird am Atom in seinem natürlichen Zustande, in dem von einer vorhergehenden Lockerung der Bindung eines der Elektronen noch nicht die Rede sein kann.

In dieser Mitteilung werde ich mich darauf beschränken, die Endformeln anzugeben und die Einzelrechnung nur ihrem Gange nach skizzieren.

§ 1. Erste Formel für die Schwingungszahl.

Den vorhergehenden Überlegungen entsprechend nehmen wir an, im Normalzustande I bewegen sich eine vorläufig unbestimmte Zahl von p-Elektronen auf einem Kreis um den Kern mit der Ladung $z\varepsilon$. Jedes derselben hat das Impulsmoment $\frac{h}{2\pi}$. Wenn der Radius dieses Kreises mit a bezeichnet wird, dann wird auf jedes Elektron eine Kraft ausgeübt gleich

$$z\frac{\varepsilon^2}{a^2} - S_p\frac{\varepsilon^2}{a^2}.$$

Der erste Term mißt die Anziehung vom Kern, der zweite die Abstoßung der $(p-1)$ übrigen Elektronen des Ringes. Bekanntlich ist die Zahl S_p dargestellt durch die Summe

$$S_p = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{i=p-1}\frac{1}{\sin i\frac{\pi}{p}}.$$

1) Man vergleiche die diesbezügliche Bemerkung Sitz.-Ber. d. K. B. Akademie d. Wiss. 1916, S. 152.

1) Die Einführung eines charakteristischen Elektronenringes steht in nahem Zusammenhange mit den Ausführungen von W. Kossel, Verhdl. d. D. Phys. Ges. 16, 953, 1914.

Die Zahlenwerte derselben für $p = 1$ bis $p = 8$ finden sich in der folgenden Tabelle.

Tabelle 1.

p	S_p
1	0.
2	0,25000
3	0,57735
4	0,95710
5	1,37637
6	1,82735
7	2,3048
8	2,8049

a) Der Normalzustand.

Nennen wir noch die Masse des Elektrons μ und die Geschwindigkeit in der Bahn v, dann lautet die Gleichgewichtsbedingung

$$\frac{\mu v^2}{a} = (z - S_p)\frac{\varepsilon^2}{a^2}. \tag{3}$$

Die Quantenbedingung hat die Form

$$\mu a v = \frac{h}{2\pi}. \tag{4}$$

Die Gleichungen (3) und (4) zusammengenommen liefern die Beziehungen:

$$\mu v^2 = (z - S_p)^2\, 2hR, \tag{3'}$$

$$\frac{\varepsilon^2}{a} = (z - S_p)\, 2hR. \tag{4'}$$

Nun wird die kinetische Energie T des Systems dargestellt durch

$$T = p \cdot \frac{\mu}{2} v^2, \tag{5}$$

während die potentielle Energie U sich mit Hilfe der Summe S_p ausdrückt in der Form

$$U = -pz\frac{\varepsilon^2}{a} + pS_p\frac{\varepsilon^2}{a} = -p(z - S_p)\frac{\varepsilon^2}{a}. \tag{6}$$

Bezeichnen wir die Gesamtenergie $T + U$ mit $-W$, dann wird

$$\frac{W_I}{hR} = p(z - S_p)^2, \tag{7}$$

wobei der Index I den Normalzustand andeuten soll, für den die Rechnung gilt.

b) Der gesprengte Ring.

Wir fragen jetzt nach der Energie eines Zustandes II, bei dem auf dem einquantigen Innenringe nur mehr $p - 1$ Elektronen sich befinden, und das abgesprengte Elektron eine zweiquantige Bahn beschreibt.

Als Kraftwirkungen nehmen wir an: Für die erste Bahn die Wirkung des Kernes allein, die Störung durch die Bahn des Einzelelektrons bleibt also unberücksichtigt, für die zweite Bahn tun wir so, als ob wir die $(p - 1)$ Elektronen des inneren Ringes mit dem Kern vereinigt denken können, so daß derselbe mit der Ladung $(z - p + 1)\varepsilon$ wirkt. Unter dieser Voraussetzung gilt für die erste Bahn vom Radius a_1 und der Elektronengeschwindigkeit v_1:

$$\left.\begin{aligned} \mu v_1^2 &= (z - S_{p-1})^2\, 2hR, \\ \frac{\varepsilon^2}{a_1} &= (z - S_{p-1})\, 2hR. \end{aligned}\right| \tag{8}$$

Ähnlich findet sich für die zweite Bahn

$$\left.\begin{aligned} \mu v_2^2 &= \frac{1}{2^2}(z - p + 1)^2\, 2hR, \\ \frac{\varepsilon^2}{a_2} &= \frac{1}{2^2}(z - p + 1)\, 2hR, \end{aligned}\right| \tag{9}$$

wenn a_2, bzw. v_2, Radius, bzw. Elektronengeschwindigkeit dieser Bahn bedeuten. Die kinetische Energie des Systems ist jetzt

$$T = (p - 1)\frac{\mu}{2} v_1^2 + \frac{\mu}{2} v_1^2, \tag{10}$$

die potentielle Energie dagegen

$$U = -(p - 1)(z - S_{p-1})\frac{\varepsilon^2}{a_1} - (z - p + 1)\frac{\varepsilon^2}{a_2}. \tag{11}$$

Die negative Gesamtenergie $W_{II} = -(T + U)$ ergibt sich damit unter Benutzung von (8) und (9) zu:

$$\frac{W_{II}}{hR} = (p - 1)(z - S_{p-1})^2 + \frac{1}{2^2}(z - p + 1)^2. \tag{12}$$

c) Die Frequenzformel.

Nach dem zweiten Bohrschen Ansatze folgt die Schwingungszahl ν der Strahlung, welche bei der Rückbildung des Zustandes I aus II ausgesandt wird aus der Energiebeziehung

$$h\nu = W_I - W_{II}.$$

Nach (7) und (12) kommt also

$$\left.\begin{aligned} \frac{\nu}{R} = {} & p(z - S_p)^2 - (p - 1)(z - S_{p-1})^2 \\ & - \frac{1}{2^2}(z - p + 1)^2, \end{aligned}\right| \tag{13}$$

d. h. $\frac{\nu}{R}$ ist eine quadratische Funktion des Stellenzeigers z. Schreiben wir

$$\frac{\nu}{R} = A_p z^2 + B_p z + C_p, \tag{14}$$

dann wird

$$\left.\begin{aligned} A_p &= A = 1 - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4} \\ B_p &= -2pS_p + 2(p - 1)S_{p-1} + \frac{1}{2}(p - 1) \\ C_p &= pS_p^2 - (p - 1)S_{p-1}^2 - \frac{1}{4}(p - 1)^2. \end{aligned}\right| \tag{15}$$

§ 2. Bestimmungen der Elektronenzahl p an Hand der Messungen über die $K_{\alpha 1}$-Linie.

Von nahezu allen Elementen von $Na\,(z=11)$ bis $Nd\,(z=60)$ liegen Messungen über die Wellenlänge der $K_{\alpha 1}$-Linie vor. Eine wertvolle Zusammenstellung derselben entnehme ich dem Bericht über die Röntgenspektren der chemischen Elemente von M. Siegbahn loc. cit. Aus den dort angegebenen Wellenlängen folgen die in der zweiten Spalte der Tabelle II aufgeführten Werte von $\frac{\nu}{R}$, wenn R zu 109740 angenommen wird.

Tabelle II.

z	$\frac{\nu}{R}$	$\frac{3}{4}z^2$	$\triangle$
11 (Na)	76,23	90,75	−14,52
12 (Mg)	91,90	108,0	−16,1
13 (Al)	109,0	126,7	−17,7
14 (Si)	127,8	147,0	−19,2
15 (P)	147,7	168,7	−21,0
16 (S)	170,7	192,0	−21,3
17 (Cl)	193,4	216,7	−23,3
19 (K)	244,0	270,7	−26,7
20 (Ca)	271,6	300,0	−28,4
21 (Sc)	300,9	339,7	−29,8
22 (Ti)	332,3	363,0	−30,7
23 (Va)	364,8	396,7	−31,9
24 (Cr)	399,0	432,0	−33,0
25 (Mn)	435,4	468,7	−33,3
26 (Fe)	472,6	507,0	−34,4
27 (Co)	511,6	546,7	−35,1
28 (Ni)	551,3	588,0	−36,7
29 (Cu)	592,1	630,7	−38,6
30 (Zn)	635,9	675,0	−39,1
32 (Ge)	724,9	768,0	−43,1
33 (As)	778,8	816,7	−37,9
34 (Se)	825,4	867,0	−41,6
35 (Br)	880,4	918,7	−38,3
37 (Rb)	988,3	1027	−38,7
38 (Sr)	1046	1083	−37
39 (Y)	1091	1141	−50
40 (Zr)	1156	1200	−44
41 (Nb)	1217	1261	−44
42 (Mo)	1283	1323	−40
44 (Ru)	1413	1452	−39
45 (Rh)	1482	1519	−37
46 (Pd)	1554	1587	−33
47 (Ag)	1622	1657	−35
48 (Cd)	1694	1728	−34
49 (In)	1787	1801	−14
50 (Sn)	1871	1875	−4
51 (Sb)	1947	1951	−4
52 (Te)	1998	2028	−36
53 (J)	2085	2107	−22
55 (Cs)	2290	2269	+21
56 (Ba)	2349	2352	−3
57 (La)	2450	2437	+13
58 (Ce)	2567	2523	+44
59 (Pr)	2664	2611	+53
60 (Nd)	2761	2700	+61

Da in Formel (15) der Faktor von z^2 unabhängig von der Elektronenzahl des Ringes gleich $\frac{3}{4}$ ist, betrachten wir an Stelle von $\frac{\nu}{R}$ selbst die Differenz $\frac{\nu}{R}-\frac{3}{4}z^2$, welche mit $\triangle$ bezeichnet wird. Die aus den Beobachtungen folgenden Werte von $\triangle$ sind in der dritten Spalte von Tabelle II zusammengestellt. Der besseren Übersicht wegen sind außerdem diese Werte von $\triangle$ als Funktion des Stellenzeigers z in Fig. 1 eingetragen.

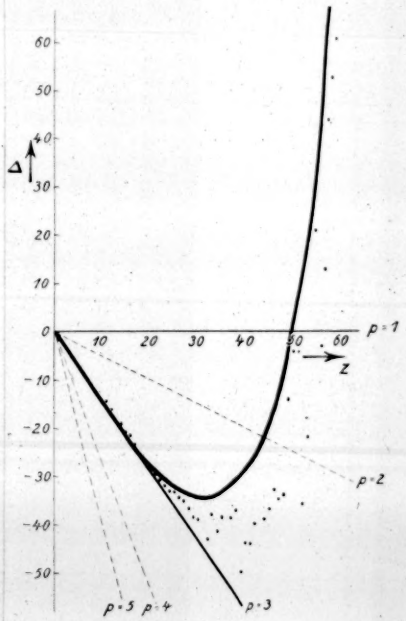


Fig. 1.

Der vorhergehenden Theorie nach sollten die $\triangle$-Werte dargestellt werden können (Formel 14) durch eine Beziehung von der Form

$$\triangle = B_p z + C_p, \qquad (16)$$

d. h. sie müßten in der Figur auf einer Geraden liegen. Das ist, wie man sieht, nicht der Fall. Trotzdem tragen wir die geraden Linien für $\triangle$ nach (16) berechnet in unsere Figur ein. Die Werte B_p und C_p, welche zu dieser Konstruktion nötig sind, folgen aus (15) unter Benutzung der Tabelle I. Sie sind für die Werte $p=1$ bis $p=8$ zusammengestellt in Tabelle III.

Trotzdem also von einer Darstellung der $\triangle$-Werte durch eine gerade Linie im ganzen nicht die Rede sein kann, zeigt doch die Figur eine bemerkenswerte Eigentümlichkeit. Die Gerade nämlich, welche zu $p=3$ gehört (und

Tabelle III.

p	B_p	C_p
1	0	0
2	— 0,5000	— 0,1250
3	— 1,4641	— 0,1250
4	— 2,6927	+ 0,4142
5	— 4,0710	+ 1,8078
6	— 5,5645	+ 4,3132
7	— 7,3390	+ 8,1488
8	— 9,1111	+ 13,5036

damit der theoretischen Spektralformel für einen Elektronenring mit 3 Elektronen entspricht), gibt eine recht gute Darstellung der $\triangle$-Werte für die leichteren Atome. Alle anderen Geraden zeigen erhebliche und mit wachsendem p wachsende Abweichungen gegen die beobachteten Werte.

Die Darstellung möge zweitens nach der folgenden Tabelle III beurteilt werden, in der in der ersten Spalte die z-Werte, in der zweiten die beobachteten Werte von $\triangle$ und in der dritten Spalte die nach der theoretischen Formel

$$\triangle = B_3 z + C_3 = -1{,}4641\, z - 0{,}1250 \quad (17)$$

berechneten $\triangle$-Werte eingetragen sind[1]).

Tabelle III.

z	$\triangle_{beob.}$	$\triangle_{ber.}$	$\triangle_{Somm.}$
11	— 14,52	— 16,2	— 16,4
12	— 16,1	— 17,7	— 17,9
13	— 17,7	— 19,2	— 19,3
14	— 19,2	— 20,6	— 20,8
15	— 21,0	— 22,1	— 22,3
16	— 21,3	— 23,5	— 23,7
17	— 23,3	— 25,0	— 25,1
19	— 26,7	— 27,9	— 28,1
20	— 28,4	— 29,4	— 29,5
21	— 29,8	— 30,9	— 31,0
22	— 30,7	— 32,3	— 32,4
23	— 31,9	— 33,8	— 33,9
24	— 33,0	— 35,3	— 35,3
25	— 33,3	— 36,7	— 36,7

Eine dritte Probe erhalten wir, indem wir den bis jetzt berechneten Zahlen der Tabelle III noch die nach der Sommerfeldschen Formel berechneten gegenüberstellen. Wie schon in der Einleitung hervorgehoben, schlägt Sommerfeld die Formel

$$\frac{\nu}{R} = \frac{(z-1{,}6)^2}{1^2} - \frac{(z-3{,}5)^2}{2^2}$$

vor, in der die Zahlen 1,6, 3,5, 1 und 2 empirisch bestimmt sind. Auch das ist eine quadratische Funktion in z, welche sich schreiben läßt

$$\frac{\nu}{R} = \frac{3}{4} z^2 - 1{,}45\, z - 0{,}50.$$

1) Man kann noch bemerken, daß genau gilt $B_2 = 2(1-\sqrt{3})$ und $C_3 = \frac{1}{8}$.

Die oben hauptsächlich in Frage kommende Differenz $\frac{\nu}{R} - \frac{3}{4} z^2$ sollte also nach dieser empirischen Formel lauten

$$\triangle = -1{,}45\, z - 0{,}50. \quad (18)$$

Es ist nun bemerkenswert, daß der Sommerfeldsche empirische Faktor von z nach (18) beinahe genau übereinstimmt mit dem entsprechenden theoretischen Faktor nach (17)[1]. Die nach (18) berechneten Werte sind als $\triangle_{Somm.}$ in die vierte Spalte der Tabelle III eingetragen. Man sieht, daß der Anschluß der theoretischen Formel an die Beobachtung gleich gut ist.

§ 3. Berücksichtigung der Veränderlichkeit der Elektronenmasse.

Wir nehmen jetzt als Tatsache an, daß der innerste Elektronenring im Normalzustande 3 Elektronen enthält und fragen nach dem Grunde der durch die Fig. 1 illustrierten Abweichung der für große Werte von z beobachteten $\frac{\nu}{R}$-Werte von den nach (14) zu berechnenden. Wir vermuten als Grund die Veränderlichkeit der Elektronenmasse und verbessern unsere Spektralformel in dieser Hinsicht. Bemerkenswerterweise wird die Endformel auch jetzt eine geschlossene.

Bedeutet c die Lichtgeschwindigkeit und U die potentielle Energie eines Elektrons, dann lautet in der Relativitätstheorie die Lagrangesche Funktion L

$$L = -\mu c^2 \left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - 1 \right) - U.$$

Die Bewegungsgleichungen für eine Koordinate q folgen nach dem allgemeinen Schema

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

Nimmt man nun als Koordinaten Polarkoordinaten r, φ, setzt dementsprechend

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2$$

und bildet die Bewegungsgleichungen, dann bekommt man für eine Kreisbewegung, bei der $r = a$, $\dot{r} = 0$ und $\varphi = \omega = \text{const}$ zu setzen ist,

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\mu a \omega^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{\partial U}{\partial r} &= 0, \\ \frac{d}{dt}\frac{\mu a^2 \omega}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} &= 0. \end{aligned}\right| \quad (19)$$

1) Eigentlich gibt Sommerfeld seine Zahlen etwas genauer an, nämlich 1,64 und 3,5; das entspräche einem Gliede 1,537 z. Nach R. Swinne (diese Zeitschr. 17. 481. 1916) hätte man statt dessen 1,6 und 3,6, einem Gliede 1,47 z entsprechend.

Die erste derselben beschreibt das Gleichgewicht der in der r-Richtung wirkenden Kraft $-\frac{\partial U}{\partial r}$ mit der Zentrifugalkraft $\mu a\omega^2/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, die zweite liefert den Impuls in der φ-Richtung als eine Konstante vom Werte $\mu^2 a\omega/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$.

a) der Normalzustand.

Für unser System von 3 Elektronen im Normalzustande haben wir also die zwei Bedingungen

$$\left.\begin{aligned}\frac{a v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} &= (z-S_3)^2\frac{\varepsilon^2}{\mu},\\ \frac{a v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} &= \frac{h}{2\pi\mu},\end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

welche an Stelle von (3) und (4) treten. Aus diesen Gleichungen folgt nach leichter Rechnung

$$\left.\begin{aligned}\mu v^2 &= 2hR(z-S_3)^2,\\ \frac{\varepsilon^2}{a} &= 2hR\,\frac{z-S_3}{\sqrt{1-\varrho(z-S_3)^2}},\end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

an Stelle von (3′) und (4′), wenn wir mit ϱ die charakteristische Größe

$$\varrho = \frac{2hR}{\mu c^2}$$

bezeichnen, für welche Sommerfeld in seinen Rechnungen den Wert $5{,}30\cdot 10^{-5}$ als den wahrscheinlichsten ansieht.

Die potentielle Energie der 3 Elektronen wird nach wie vor durch (6) dargestellt

$$U = -3(z-S_3)\frac{\varepsilon^2}{a}, \qquad (22)$$

dagegen hat man nunmehr für die kinetische Energie zu schreiben

$$T = 3\mu c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right). \qquad (22')$$

Setzt man in (22) und (22′) die Werte von μv^2 und $\frac{\varepsilon^2}{a}$ nach (21) ein, dann folgt für die negative Gesamtenergie

$$W_I = -(T+U)$$

die Darstellung

$$\frac{W_I}{hR} = \frac{6}{\varrho}\left(1-\sqrt{1-\varrho(z-S_3)^2}\right). \qquad (23)$$

b) Der gesprengte Ring.

Bezeichnen wir in „ionisiertem" Zustand II die negative Gesamtenergie des innersten Ringes (mit 2 Elektronen) mit W_{II}' und die entsprechende Größe für den zweiquantigen Ring (mit einem Elektron) mit W_{II}'', dann wird in Analogie mit (23):

$$\frac{W_{II}'}{hR} = \frac{4}{\varrho}\left(1-\sqrt{1-\varrho(z-S_2)^2}\right) \qquad (24)$$

und

$$W_{II}'' = \frac{2}{\varrho}\left(1-\sqrt{1-\frac{\varrho}{4}(z-2)^2}\right). \qquad (24')$$

Die gesuchte Größe wird also

$$\left.\begin{aligned}\frac{W_{II}}{hR} &= \frac{W_{II}'+W_{II}''}{hR}\\ &= \frac{4}{\varrho}\left(2-\sqrt{1-\varrho(z-S_2)^2}\right)\\ &\quad+\frac{2}{\varrho}\left(1-\sqrt{1-\frac{\varrho}{4}(z-2)^2}\right).\end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

c) Die Frequenzformel.

Aus (23) und (25) folgt nach der Beziehung

$$W_I - W_{II} = h\nu$$

für die Frequenz der ausgesandten Spektrallinie

$$\left.\begin{aligned}\frac{\nu}{R} = \frac{1}{\varrho}\Big\{&4\sqrt{1-\varrho(z-S_2)^2}\\ &+2\sqrt{1-\frac{\varrho}{4}(z-2)^2}-6\sqrt{1-\varrho(z-S_3)^2}\Big\},\end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

wobei also $\varrho = \frac{2hR}{\mu c^2} = 5{,}30\cdot 10^{-5}$, während nach Tabelle I die Größen S_2 und S_3 die Werte haben $S_2 = 0{,}25\,000$, $S_3 = 0{,}57\,735$.

Bei Nd, dem Element mit dem größten z-Werte, für welches K_{α_1} noch beobachtet wurde, wird $\varrho z^2 = 0{,}19$, man kann also auch an Stelle von (26) die Reihenentwicklung benutzen, welche lautet:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\nu}{R} &= (3\xi^2-2\eta^2-\zeta^2)\\ &+\varrho\left(\frac{3}{4}\xi^4-\frac{1}{2}\eta^4-\frac{1}{4}\zeta^4\right)\\ &+\varrho^2\left(\frac{3}{8}\xi^6-\frac{1}{4}\eta^6-\frac{1}{8}\zeta^6\right)\\ &+\varrho^3\left(\frac{15}{64}\xi^8-\frac{5}{32}\eta^8-\frac{5}{64}\zeta^8\right)\\ &+\varrho^4\left(\frac{21}{128}\xi^{10}-\frac{8}{64}\eta^{10}-\frac{7}{128}\zeta^{10}\right)\\ &+\varrho^5\left(\frac{63}{512}\xi^{12}-\frac{21}{256}\eta^{12}-\frac{21}{512}\zeta^{12}\right)\\ &+\cdots\cdots\end{aligned}\right\} \qquad (26')$$

wenn zur Abkürzung

$$\xi = z - 0{,}57735, \quad \eta = z - 0{,}25000,$$
$$\zeta = \frac{z-2}{2}$$

gesetzt wird. Vielfach ist indessen die Rechenarbeit bei direkter Verwendung von (26) geringer.

d) Vergleich mit der Erfahrung.

Inwiefern unsere Erwartungen über die zu erreichende Verbesserung durch Ersatz unserer früheren Formel

$$\frac{\nu}{R} = \frac{3}{4} z^2 - 1{,}4641\, z - 0{,}1250$$

durch die korrigierte Formel (26) erfüllt werden, wird durch Fig. 1 gezeigt.

Die Differenz $\triangle = \frac{\nu}{R} - \frac{3}{4} z^2$, welche früher durch eine Gerade dargestellt werden mußte, bekommt nach (26) einen Zusatz, welcher im Groben proportional z^4 ist. Die Differenz wird infolgedessen erst negativ, erreicht ein negatives Minimum, um dann schnell durch o hindurch nach positiven Werten zu steigen. Man sieht, daß gerade dieser typische Verlauf der Differenzen den beobachteten Punkten entspricht.

Der Anschluß selbst an die Beobachtungen ist schon recht gut, wenn man bedenkt, daß in der Figur nur die verhältnismäßig kleinen Differenzen $\frac{\nu}{R} - \frac{3}{4} z^2$ aufgetragen sind. Um das noch an Hand der Zahlen für $\frac{\nu}{R}$ selbst zu zeigen, füge ich Tabelle IV ein.

Tabelle IV.

z	ν/R beob.	ν/R ber. nach (26)	Abweichung in Proz.	ν/R ber. nach (27)	Abweichung in Proz.
10	—	61,89	—	60,38	—
15	147,7	146,4	0,9	147,2	0,3
20	271,6	272,4	0,3	270,9	0,3
25	435,4	437,3	0,4	435,5	0,0
30	635,9	641,5	0,9	640,0	0,6
35	880,4	885,6	0,6	883,8	0,4
40	1156	1171	1,3	1170	1,2
45	1482	1499	1,1	1499	1,1
50	1871	1877	0,3	1875	0,2
55	2290	2297	0,3	2300	0,4
60	2761	2777	0,6	2774	0,5
65	—	3306	—	3303	—

In der ersten Spalte stehen die Ordnungszahlen, jetzt mit je 5 Einheiten steigend, in der zweiten Spalte stehen die beobachteten Werte von $\frac{\nu}{R}$; die ersten beiden Spalten bilden also einen Auszug aus Tabelle II. In der dritten Spalte folgen dann die theoretischen nach (26) berechneten Werte und in der vierten die Differenzen gegen die beobachteten in Prozenten. Man sieht, daß der Anschluß recht gut ist, insbesondere, wenn man noch bedenkt, daß in der theoretischen Formel zwei Konstanten vorkommen R und ϱ, deren Zahlenwerte beide angenommen wurden auf Grund von Messungen, welche mit der K-Serie nichts zu tun haben.

Schließlich ist noch in der fünften Spalte hinzugefügt, ν/R berechnet nach der Sommerfeldschen für die Veränderlichkeit der Elektronenmasse korrigierten Interpolationsformel, welche man schreiben kann

$$\frac{\nu}{R} = \frac{2}{\varrho}\left(\sqrt{1 - \frac{\varrho}{4}(z-3{,}5)^2} - \sqrt{1-\varrho(z-1{,}6)^2}\right), \quad (27)$$

Die prozentualen Abweichungen dieser Werte von den beobachteten, in Spalte 6 eingetragen, sind um ganz wenig kleiner als die der Spalte 4, was übrigens bei einer Formel mit einigen den Beobachtungen angepaßten Zahlen nicht wunder zu nehmen braucht.

§ 4. Weitere Bemerkungen und Vermutungen.

Wie insbesondere die Tabelle IV zeigt, könnte man sich wohl mit der bisherigen Darstellung zufrieden geben. Indessen legt Fig. 1 bei näherer Betrachtung die Vermutung nahe, daß die theoretische Formel (26) noch nicht ganz vollständig ist. Zwar zeigen nämlich die übrig gebliebenen Differenzen zweiter Ordnung zwischen den Ordinatenwerten der theoretischen Kurve und der beobachteten Punkte nach (26) so erhebliche Schwankungen, daß man sie nicht ihrerseits wieder zu einer glatten Kurve zusammensetzen kann. Sie sind aber alle positiv genauer

$$\left(\frac{\nu}{R}\right)_{\text{berechnet}} - \left(\frac{\nu}{R}\right)_{\text{beobachtet}}$$

ist stets positiv. Man kann sich nun die Frage vorlegen, ob es einen Grund dafür geben kann, daß solche geringe positive Differenzen schließlich noch übrig bleiben können. Als erstes wird man bemerken, daß ein Punkt in den vorhergehenden Überlegungen nicht ganz befriedigen kann. Den Kern nämlich mit den zwei übrig gebliebenen Elektronen haben wir in seiner Wirkung so behandelt, als ob er einem einfachen Kerne mit der Ladungszahl $z-2$ gleichkäme. Man kann nun die Überlegungen

so verbessern, daß man beim Quantenansatz die gegenseitige Beeinflussung des einquantigen Ringes mit zwei Elektronen und des zweiquantigen mit einem Elektron mit berücksichtigt. Führt man das so aus, daß man sich die Ladungen über die betreffenden Kreise gleichmäßig verteilt denkt, dann werden beide Ringdurchmesser etwas abgeändert und machen schließlich eine Korrektion der Zahlenkoeffizienten nötig. Die Rechnung, deren Einzelheiten ich übergehe, ergibt an Stelle von

$$\frac{\nu}{R} = \frac{3}{4} z^2 - 1{,}4641\ z - 0{,}1250$$

die Beziehung

$$\frac{\nu}{R} = \frac{3}{4} z^2 - 1{,}4485\ z - 0{,}1555;$$

beides ohne Korrektion für die Massenveränderlichkeit. Die Änderung der Formel ist so gering, daß sie nicht wesentlich in Frage kommt.

Zu einer, wie es scheint, der Sachlage besser angepaßten Auffassung kommt man, wenn man versucht auch über die anderen Linien der K-Serie vom hier vertretenen Standpunkt aus Aufschluß zu gewinnen.

Die K_{α_2}-Linie kommt hierbei nicht in Frage, ihre Wellenlängendifferenz gegen die K_{α_1}-Linie ergibt sich mit aller wünschenswerten Genauigkeit, wenn man sie ganz im Sommerfeldschen Sinne aus dem Auftreten einer zweiquantigen Ellipse neben dem zweiquantigen Kreise erklärt.

Anders die zweitstärkste Linie K_{β_1} der Serie. Man kann vermuten, daß dieselbe auftritt beim Zurückfallen des einen Elektrons aus einem dreiquantigen Kreise in die ursprüngliche Anordnung. Es müßte dann, mit Berücksichtigung der Massenveränderlichkeit für K_{β_1}, die Beziehung gelten

$$\frac{\nu}{R} = \frac{1}{\varrho}\left\{4\sqrt{1-\varrho(z-S_2)^2} + 2\sqrt{1-\frac{\varrho}{9}(z-2)^2} - 6\sqrt{1-\varrho(z-S_3)^2}\right\}, \tag{28}$$

welche sich von (26) nur dadurch unterscheidet, daß im zweiten Gliede $\varrho/9$ statt $\varrho/4$ steht. Inwiefern diese Darstellung berechtigt wäre, zeigt die folgende Tabelle V.

In der ersten Spalte stehen wieder die Stellenzeiger, in der zweiten die nach (28) berechneten Werte von $\frac{\nu}{R}$ (für K_{β_1}), in der dritten die beobachteten.

Die Differenz

$$\left(\frac{\nu}{R}\right)_{\text{ber.}} - \left(\frac{\nu}{R}\right)_{\text{beob.}} = D$$

Tabelle V.

z	$(\nu/R)_{\text{ber.}}$	$(\nu/R)_{\text{beob.}}$	D	$D_{\text{in Proz.}}$
10	72,07	—	—	—
15	169,8	156,9	12,9	7,6
20	317,0	295,3	21,7	6,8
25	511,3	479,1	32,2	6,7
30	750,9	704,2	46,7	3,7
35	1038	980,9	57	5,8
40	1372	1293	79	6,1
45	1758	1666	92	5,5
50	2201	2109	92	4,4
55	2696	2589	107	4,1
60	3250	3121	129	4,1
65	3869	—	—	—

ist in der vierten Spalte eingetragen. Sie ist wesentlich größer als bei K_{α_1}, aber auffallenderweise ebenfalls durchweg positiv. Um eine Übersicht zu gewinnen, ist in Fig. 2 die Größe D als Funktion von z eingetragen (Kreuze).

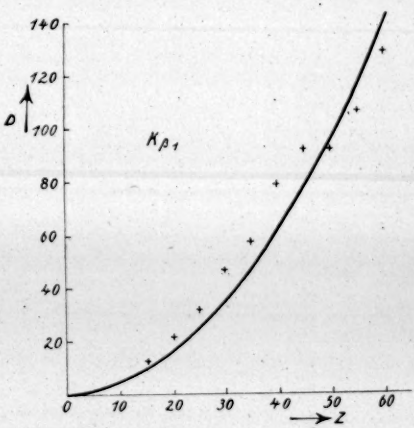


Fig. 2.

Man kann versuchen die Differenz D ihrerseits wieder durch eine Formel darzustellen, welche nun im Gegensatz zum früheren zunächst einen rein interpolatorischen Charakter hat. Setzt man

$$D = \alpha z^2 \tag{29}$$

mit $\alpha = 0{,}0398$, so entspricht dieser Ansatz dem Verlauf der aus den Beobachtungen berechneten D der Tabelle, wie Fig. 2 zeigt, in der (29) als Kurve eingetragen wurde.

So kommen wir im ganzen für die K_{β_1}-Linie zu folgender Darstellung:

$$\frac{\nu}{R} = \frac{1}{\varrho}\left\{4\sqrt{1-\varrho(z-S_2)^2}\right. \tag{30}$$
$$\left. + 2\sqrt{1-\frac{\varrho}{9}(z-2)^2} - 6\sqrt{1-\varrho(z-S_3)^2}\right\} - \alpha z^2.$$

Die Frage ist nun, ob das empirische Korrektionsglied αz^2 seine Erklärung im Atomaufbau finden kann.

Wir machen zunächst eine qualitative Bemerkung. Ebenso wie bei der K_{β_1}-Linie hatten wir bei der K_{α_1}-Linie Differenzen gegen die berechneten Schwingungszahlen gefunden. Die Abweichung hat in beiden Fällen denselben Sinn, ist aber bei K_{β_1} erheblich größer als bei K_{α_1}. Da liegt es offenbar nahe, an eine Störung zu denken, die von außen kommend auf den dreiquantigen Ring der K_{β_1}-Linie einen größeren Einfluß ausüben kann als auf den kleineren zweiquantigen Ring, der zur K_{α_1}-Linie gehört. Solche Störungen, von den äußeren Elektronen herrührend, sind von Sommerfeld[1] einer Berechnung unterzogen worden. Er kommt zu einem Resultat, welches wir für unsere Zwecke folgendermaßen spezialisieren können. Bewegt sich ein Elektron in einem n-quantigen Ringe um einen Kern von der Ladungszahl z und wird es gestört durch einen äußeren Elektronenring, dann ergibt sich für seine negative Gesamtenergie W der Wert

$$\frac{W}{hR} = \frac{z^2}{n^2(1-\beta n^6)}, \tag{31}$$

wobei β eine Konstante bedeutet. Der Zusatzfaktor $1-\beta n^6$ im Nenner mißt die Störung.

Die Relativitätskorrektion ist in (31) unberücksichtigt geblieben; wir gestatten uns weiter erstens den Zähler z^2 an Stelle von $(z-2)^2$ stehen zu lassen und schließlich (31) zu entwickeln in

$$\frac{W}{hR} = \frac{z^2}{n^2} + \beta n^4 z^2. \tag{31'}$$

Dann sieht man, daß die von außen kommende Störung gerade ein Störungsglied von der oben gefundenen empirischen Gestalt bedingt. Worauf es dabei wesentlich ankommt, ist die Tatsache, daß das Vorzeichen des Zusatzgliedes mit dem in (30) eingeführten übereinstimmt, wenn wir annehmen, daß der dreiquantige Elektronenring gestört wird, so wie das (31') ausdrückt. Da $n=3$, entspricht $\alpha = 0{,}0398$ der Wert $\beta = 0{,}000491$.

Wir können nunmehr noch eine weitere Probe auf die Existenz der fraglichen Störung machen. Ist sie nämlich beim dreiquantigen Ringe vorhanden, dann muß sie, allerdings stark geschwächt, auch beim zweiquantigen Ringe der K_{α_1}-Linie in Erscheinung treten, d. h. zur Formel (26) wäre noch das Korrektionsglied

$$-\beta \cdot 2^4 \cdot z^2 = -0{,}00785\, z^2$$

hinzuzufügen. Tatsächlich zeigt Fig. 3, daß sich die bei der Darstellung der K_{α_1}-Linie durch (26) übriggebliebenen Differenzen, welche als Punkte eingetragen sind, wohl durch jenes Zusatzglied

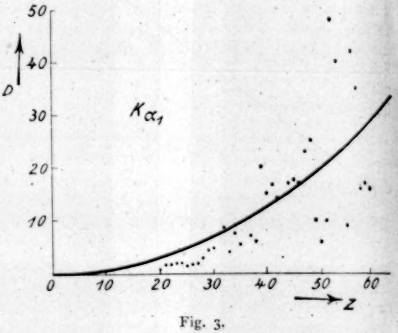


Fig. 3.

(ausgezogene Kurve) ausgleichen dürften. Man sieht aber zugleich an der wirren Lagerung der Punkte, daß die Fehler der bisherigen Beobachtungen weitere Schlüsse unterbinden.

Zum Schlusse will ich nicht unerwähnt lassen, daß es nicht ausgeschlossen ist, daß verfeinerte Beobachtungen die Unmöglichkeit eines letzten Korrektionsgliedes von so einfacher Gestalt wie oben dartun werden. Die äußeren Elektronen erzeugen dasselbe, ihre Lagerung aber wird von Atom zu Atom individuelle Unterschiede aufweisen, man kann also an das letzte Korrektionsglied nur die Forderung stellen, daß es dem Gange nach die Beobachtung wiedergibt.

Fassen wir zusammen, dann scheint mir aus dem Obigen mit erheblicher Wahrscheinlichkeit das Resultat hervorzugehen: Alle Atome (mit Ausnahme der Anfangselemente) enthalten um den Kern einen ersten, einquantigen Ring, welcher aus drei Elektronen besteht.

Göttingen, Physik. Institut.

(Eingegangen 2. Juni 1917.)

1) K. B. Akademie d. Wiss. loc. cit.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Redaktion von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Verliehen: Dem Privatdozenten für Pharmazeutische Chemie an der Universität Kiel Dr. Richard Horrmann der Titel Professor, dem Professor der Chemie an der Tierärztlichen Hochschule Dresden Dr. Hermann Kunz-Krause der Titel Geheimer Medizinalrat, dem Honorardozenten für darstellende Geometrie und Mathematik an der Hochschule für Bodenkultur in Wien Dr. Wilhelm Olbrich der Titel a. o. Professor.

Gestorben: Der Chemiker am Kaiser-Wilhelm-Institut für Physikalische Chemie und Elektrochemie in Berlin-Dahlem Dr. Friedrich Joseph Weil, der frühere Herausgeber der „Chemischen Revue über die Fett- und Harz-Industrie" Dr. Louis Allen in Hamburg.

Für die Schriftleitung verantwortlich Geh. Regierungsrat Prof. Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.